

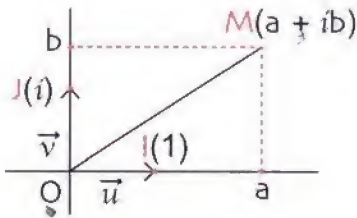
1 - الشكل الجبري

1. تعريف

- a, b عددان حقيقيان ، i العدد المركب حيث $i^2 = -1$.
- الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .
- $a = \text{Re}(z)$ و نكتب $a = \text{Re}(z)$ يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له $\text{Re}(z)$.
- $b = \text{Im}(z)$ و نكتب $b = \text{Im}(z)$ يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له $\text{Im}(z)$.
- عندما $b = 0$ يكون z حقيقيا. وعندما $a = 0$ و $b \neq 0$ يكون $z = ib$ و يسمى z عددا تخيليا صرفا.
- يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز \mathbb{C} .

• التمثيل الهندسي لعدد مركب

- **ملاحظة :** في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- يرفق بكل عدد مركب z حيث $z = a + ib$ النقطة M ذات الإحداثيين $(a; b)$.
- z يسمى لاحقة النقطة M في \mathbb{C} .
- M تسمى صورة العدد المركب z في المستوي و يرمز لذلك $M(z)$.



- **حالات خاصة** : صورة العدد 1 هي النقطة $(1; 0)$ و نكتب $I(1)$.
- محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية.
- صورة العدد i هي النقطة $(0; 1)$ و نكتب $I(i)$.
- محور الترتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.

• الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

قواعد الجمع و الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} تطبق كما هي في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} مع اعتبار $i^2 = -1$ و على الخصوص :

1. الفرق $z' - z$ هو المجموع $z' + (-z)$.
2. مقلوب عدد مركب غير منعدم $z = a + ib$ هو $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$ حيث $\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$.
3. $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ ؛ $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.
4. $z = a + ib$ عدد مركب حيث $z = 0$ إذا و فقط إذا كان $a = 0$ و $b = 0$.
5. $z' = z$ يعني $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ و $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.
6. z, z' عددان مركبان حيث $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ إذا و فقط إذا كان $a = a'$ و $b = b'$.

• الأعداد المركبة والاشعة - لاحقة مرجح

يرفق بكل شعاع $\vec{u}(x; y)$ العدد المركب $z = x + iy$. يسمى z لاحقة الشعاع \vec{u} .

2. خواص

\vec{u}, \vec{v} شعاعان لاحتقائهما z, z' على الترتيب، λ عدد حقيقي.

• لاحقة الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ هي $z + z'$.

• لاحقة الشعاع $\lambda \vec{u}$ هي λz .

• A, B, C نقط لواحقها z_A, z_B, z_C على الترتيب.

• لاحقة الشعاع \vec{AB} هي $z_B - z_A$.

• لاحقة المرجح G للنقط A, B, C المرفقة بالمعاملات α, β, γ على الترتيب حيث $\alpha + \beta + \gamma = 0$

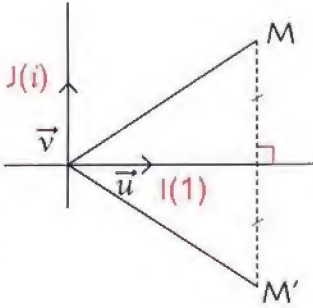
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ هي } z_G \text{ حيث}$$

II - مرافق عدد مركب

1. تعريف

مرافق العدد المركب z حيث $z = a + ib$ هو العدد المركب الذي يرمز له \bar{z} حيث $\bar{z} = a - ib$.

• التمثيل الهندسي



في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
النقطة $M'(z)$ هي نظيرة النقطة $M(z)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

نتائج

$$1. \bar{\bar{z}} = z$$

$$2. \text{إذا كان } z = a + ib \text{ فإن } z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$3. z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \text{ و } z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

$$4. z = \bar{z} \text{ حقيقي يعني}$$

$$5. z = -\bar{z} \text{ تخيلي صرف يعني}$$

2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

$$\bullet z' + \bar{z} = \overline{z + z'} \bullet z \text{ حقيقي يعني } z = \bar{z}$$

$$\bullet \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \bullet \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \text{ حيث } z' \neq 0$$

III - طولية عدد مركب

1. تعريف

طولية العدد المركب z حيث $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي يرمز له $|z|$ والمعرف كما يلي : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

التفسير الهندسي

z عدد مركب : $z = a + ib$: صورة M في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لاحقة \vec{OM} هي z .

لدينا $||\vec{OM}|| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن $OM = |z|$

نتائج

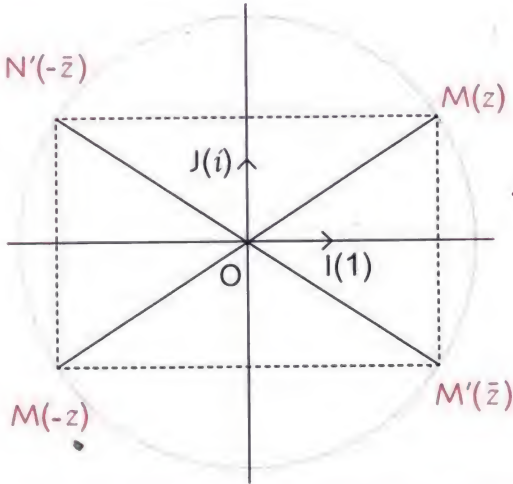
$$|z|^2 = z \bar{z} = a^2 + b^2 \quad 1.$$

2. من أجل كل عدد مركب z ، $|z| = 0$ يعني $z = 0$.

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| \quad 3.$$

$$(z \neq 0) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad 4. \text{ أ.}$$

ب. إذا كان $|z| = 1$ فإن $\frac{1}{z} = \bar{z}$



2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و \bar{z} و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{حيث } z' \neq 0$$

IV - عمدة عدد مركب

1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم صورته النقطة M في المستوى المنسوب إلى معلم $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.

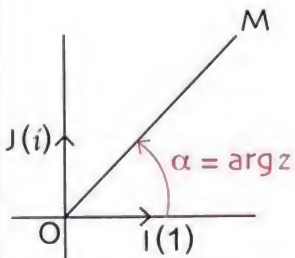
نسمي عمدة z ونرمز لها $\arg z$ كل قيس (بالراديان) للزاوية (\vec{OI}, \vec{OM}) .

لكل عدد مركب غير منعدم ما لانهاية من العمدات. فإذا كان θ إحداها

$$\text{نكتب } \arg z = \theta + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

إذا كان α عددا من بين الأعداد $\theta + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

نكتب $\arg z = \alpha$.



ملاحظات

- العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدأ المعلم.
- z عدد حقيقي موجب تماماً يعني $\arg z = k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد حقيقي سالب تماماً يعني $\arg z = \pi + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد تخيلي صرف يعني $\arg z = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ أو $\arg z = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg \bar{z} = -\theta + k2\pi$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg (-z) = \theta + \pi + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $M(z) \neq M'(z')$ فإن $\arg(z' - z) = (\vec{OI}, \vec{MM'}) + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.

2. خواص :

- من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد صحيح n غير منعدم :
- $\arg z \cdot z' = \arg z + \arg z' + k2\pi$: $\arg z^n = n \arg z + k2\pi$.
- $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + k2\pi$ حيث $z' \neq 0$ و $k \in \mathbb{Z}$.

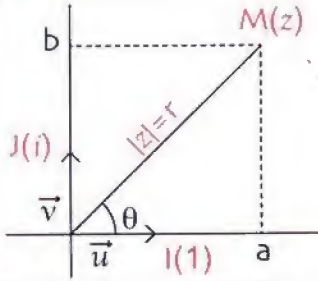
• حالة خاصة إذا كان $|z| = 1$ فإن $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$

V - توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات النقط

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- إذا كان $A(z_1), B(z_2)$ نقطتين من المستوي فإن $|\vec{AB}| = |z_2 - z_1|$.
- $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_2 - z_1) + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$ نقاطا من المستوي فإن
- $(\vec{CA}; \vec{CB}) = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$.
- r عدد حقيقي موجب، θ عدد حقيقي، (z_0) نقطة من المستوي.
- مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق العلاقة $z = z_0 + re^{i\theta}$ هي :
- (أ) دائرة مركزها ω و نصف قطرها r من أجل r ثابت و θ متغير.
- (ب) نصف مستقيم مبدؤه النقطة ω و $e^{i\theta}$ لاحقة شعاع توجيه له من أجل r متغير و θ ثابت.

VI - الشكل المثلثي لعدد مركب غير منعدم

1. تعريف



z عدد مركب غير منعدم ؛ نضع $|z| = r$ و $\arg z = \theta + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z ونكتب $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

2. الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي والعكس

لانتقال من الشكل $z = a + ib$ إلى الشكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، نحسب r ، $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\cos \theta = \frac{a}{r}$ و $\sin \theta = \frac{b}{r}$

لانتقال من الشكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ إلى الشكل $z = a + ib$ نحسب a و b حيث $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$

ملاحظات

$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ يكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' + k2\pi$ حيث $r > 0$ و $r' > 0$ و $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$ هي الشكل الجبري للعدد $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

إذا كان $r < 0$ فالكتابة $-r[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$ هي الشكل المثلثي للعدد z

3. دستور موافر (Moivre)

من أجل كل عدد n من \mathbb{Z} ، $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

العلاقة $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ تسمى دستور موافر.

VII - الشكل الأسّي لعدد مركب

ترميز أولير (Euler)

نضع من أجل كل عدد حقيقي θ ، $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

يرمز العدد $e^{i\theta}$ إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له.

الكتابة $e^{i\theta}$ تسمى ترميز أولير للعدد المركب $\cos \theta + i \sin \theta$

1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم طويلته r و θ عمدة له.

الكتابة $z = re^{i\theta}$ تسمى الشكل الأسّي للعدد z

2. قواعد الحساب

قواعد الحساب في الشكل الأسّي هي قواعد الحساب على القوى.

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \text{ و } z' = r' e^{i\theta'} \\ z \cdot z' &= r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')} \\ \bar{z} &= \overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta} \end{aligned}$$

نضع $z = r e^{i\theta}$ و $z' = r' e^{i\theta'}$.
عمدة و طول $z \cdot z'$: $r \cdot r'$
عمدة و طول \bar{z} : r
عمدة \bar{z} هي $-\theta$ و طول \bar{z} هو r

3. دستور موافر و ترميز أولير

دستور موافر الوارد في الشكل المثلثي يكتب على الشكل الأسّي كما يلي :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ حيث } n \in \mathbb{Z}$$

نتيجة

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ و } e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ و } \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

تسمى كل من هاتين العلاقتين دستور أولير.

VIII - الجذران التربيعيان لعدد مركب غير منعدم

z عدد مركب غير منعدم حيث $z = a + ib$: $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

z عدد مركب غير منعدم حيث $z = x + iy$: $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

\sqrt{z} جذر تربيعي للعدد z إذا و فقط إذا كان $\sqrt{z}^2 = z$

$$(x + iy)^2 = a + ib \text{ أي أن}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \text{ و بالتالي}$$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين \sqrt{z}_1 و \sqrt{z}_2 للعدد z حيث $\sqrt{z}_2 = -\sqrt{z}_1$

z عدد مركب غير منعدم حيث $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$: $r = |z|$ و $\theta = \arg z$

z عدد مركب غير منعدم حيث $z = \rho (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$: $\rho = |z|$ و $\alpha = \arg z$

\sqrt{z} جذر تربيعي للعدد z إذا و فقط إذا كان $\sqrt{z}^2 = z$

$$\rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) = r (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ أي أن}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + k2\pi \end{cases} \text{ و بالتالي حيث } k \in \mathbb{Z}$$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين z_1 و z_2 للعدد z حيث $z_2 = -z_1$.

ملاحظة

إذا كان $z = re^{i\theta}$ و $z = pe^{i\alpha}$ فإن $z^2 = z$ إذا وفقط إذا كان $pe^{2i\alpha} = re^{i\theta}$ أي أن $p^2 = r$ و $2\alpha = \theta$.
وبالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $z_2 = -z_1$.

IX - المعادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C}

- المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ ، $b \in \mathbb{C}$ ، $c \in \mathbb{C}$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول z في \mathbb{C} .
- العدد المركب Δ حيث $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة السابقة.
- δ و $-\delta$ - الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ .

مبرهنة

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين في \mathbb{C}

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{هما}$$

• إذا كان $\Delta = 0$ فإن $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$ و إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $z_1 \neq z_2$.

ملاحظات

- إذا كان $b = 2b'$ فإن $\Delta' = b'^2 - ac$ و $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a}$ و $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a}$ حيث δ' جذر تربيعي للعدد Δ' .
- a, b, c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.
إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين حقيقيين.
إذا كان $\Delta < 0$ فإن $i\sqrt{-\Delta}$ جذر تربيعي للعدد Δ
و المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مترافقين في \mathbb{C}
هما $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \bar{z}_1$.

X - التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.
- دراسة التحويلات النقطية التي ترفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$ ؛ $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ أو $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a| = 1$ و $b \in \mathbb{C}$.

التحويل النقطي وعناصره المميزة	التعريف الهندسي	الكتابة المركبة	التمثيل
t هو الإنسحاب الذي شعاعه \vec{v}	$t : M \mapsto M'$ حيث $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$	$t : M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = z + b$ و \vec{v} الشعاع الذي لاحقه b	
h هو التحاكي الذي مركزه ω ونسبته λ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$h : M \mapsto M'$ حيث $\overrightarrow{\omega M'} = \lambda \overrightarrow{\omega M}$	$h : M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = \lambda (z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω	
r هو الدوران الذي مركزه ω وزاويته θ حيث $\theta \in \mathbb{R}$	$r : M \mapsto M'$ حيث $\begin{cases} \omega M' = \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ و $k \in \mathbb{Z}$	$r : M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = e^{i\theta} (z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$	

و بالعكس، كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.

حيث $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ هو :

1. إنسحاب شعاعه $\vec{v}(b)$ إذا كان $a = 1$.

2. تحاك نسبة a إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).

3. دوران زاويته θ حيث $\theta = \arg a + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$ إذا كان $a \neq 1$ و $|a| = 1$

(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).

ملاحظتان

1. كل من التحاكي الذي مركزه ω ونسبة 1 - و الدوران الذي مركزه ω وزاويته π هو تناظر مركزه

ω و كتابته المركبة هي : $z' = -z + 2z_0$ حيث z_0 لاحقة ω .

2. كل نقطة تنطبق على صورتها بتحويل نقطي تسمى نقطة صامدة لهذا التحويل.

r هو دوران مركزه ω وزاويته θ	h هو تحاك مركزه ω ونسبته k	t هو إنسحاب شعاعه \vec{v}
• إذا كان $k2\pi \neq \theta$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة وهي المركز ω .	• إذا كان $k \neq 1$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة وهي المركز ω .	• إذا كان $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإنه لا توجد نقط صامدة.
• إذا كان $\theta = k2\pi$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الدوران.	• إذا كان $k = 1$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا التحاكي.	• إذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الانسحاب.

1 إنجاز العمليات الحسابية على الاعداد المركبة

تمرين 1

أنجز العمليات الحسابية التالية، ثم اكتب العدد الناتج على الشكل الجبري.

$$\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i}, \frac{2-i}{3+i} \times \frac{3-i}{1-i}, \frac{i-5}{3+5i}, (1+i)^3, (3+4i)(3-4i), (2+3i)^2$$

حل

قواعد الحساب في \mathbb{C} هي قواعد الحساب المعروفة في \mathbb{R} مع $i^2 = -1$.

• $(2+3i)^2$ من الشكل $(a+ib)^2$: لدينا $(2+3i)^2 = (2)^2 + 2(2) \times (3i) + (3i)^2$

$$= 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i + 9(-1)$$

وبالتالي $(2+3i)^2 = -5 + 12i$

• $(3+4i)(3-4i)$ من الشكل $(a+ib)(a-ib)$: لدينا $(3+4i)(3-4i) = (3)^2 - (4i)^2$

$$= 9 - 16(-1)$$

وبالتالي $(3+4i)(3-4i) = 25$

• $(1+i)^3$ من الشكل $(a+ib)^3$: لدينا $(1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$

إذن $(1+i)^3 = -2 + 2i$

ملاحظة : يمكن كتابة $(1+i)^3$ على الشكل $(1+i)(1+i)^2$ ثم إجراء الحساب.

• حساب $\frac{i-5}{3+5i}$: لدينا $\frac{i-5}{3+5i} = \left(\frac{i-5}{3+5i}\right) \left(\frac{3-5i}{3-5i}\right)$

$$= \frac{3i - i(-5i) - 5 \times 3 + 5(-5i)}{3^2 - (5i)^2} = \frac{-10 + 28i}{34} = -\frac{5}{17} + \frac{14i}{17}$$

وبالتالي $\frac{i-5}{3+5i} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$

• حساب $\frac{2-i}{3+i} \times \frac{3-i}{1-i}$

لدينا $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)} = \frac{6 - 2i - 3i + i^2}{3 - 3i + i - i^2} = \frac{5-5i}{4-2i}$

كتابة العدد المركب $\frac{5-5i}{4-2i}$ على الشكل الجبري .

• لدينا $\frac{5-5i}{4-2i} = \frac{(5-5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{20 + 10i - 20i - 10i^2}{20} = \frac{30-10i}{20} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

وبالتالي $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

• حساب $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i}$

بعد توحيد المقامين نكتب :

$$\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(i-4)(1-i) + (2+3i)(2+5i)}{(2+5i)(1-i)}$$

$$\frac{(i-i^2-4+4i) + (4+10i+6i+15i^2)}{2-2i+5i-5i^2} = \frac{-14+21i}{7+3i}$$

و بالتالي $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{-14+21i}{7+3i}$

كتابة العدد المركب $\frac{-14+21i}{7+3i}$ على الشكل الجبري. لدينا $\frac{-14+21i}{7+3i} = \frac{(-14+21i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)}$

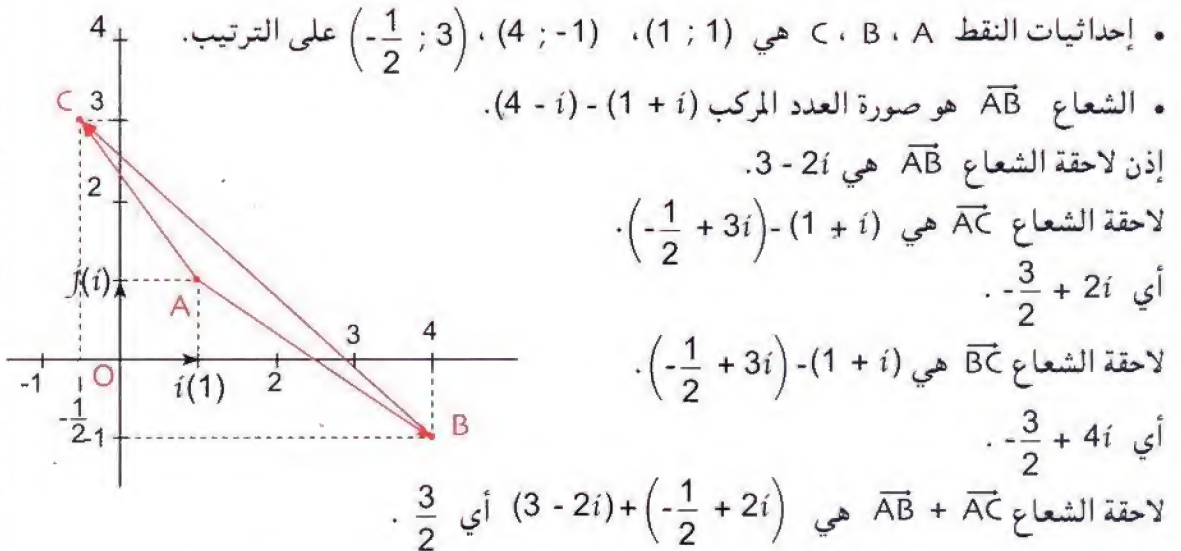
$$\frac{-14+21i}{7+3i} = \frac{-35}{58} + \frac{189}{58}i$$

بعد الحساب و الاختصار نجد $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{-35}{58} + \frac{189}{58}i$

تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. علم النقط A, B, C ذات اللواحق $1+i, 4-i, -\frac{1}{2}+3i$ على الترتيب. احسب لواحق الاشعة $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$. $\vec{AB} + \vec{AC}$.

حل



ملاحظة بما أن لاحقة الشعاع $\vec{AB} + \vec{AC}$ عدد حقيقي فإن هذا الشعاع يوازي الشعاع \vec{OA} .

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad , \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$$

حل

نضع $z = x + iy$ حيث x, y عدنان حقيقيان.

نكتب العدد $\frac{z-1}{z-i}$ على الشكل الجبري مع $z \neq i$

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} &= \frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{[x-1+iy][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]} \\ &= \frac{x(x-1)+y(y-1)+i[-(x-1)(y-1)+xy]}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

لدينا

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2} \quad : \text{ بعد الحساب و الاختصار نجد : }$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

• مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ هي مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad \text{ باستثناء النقطة } J(0; 1).$$

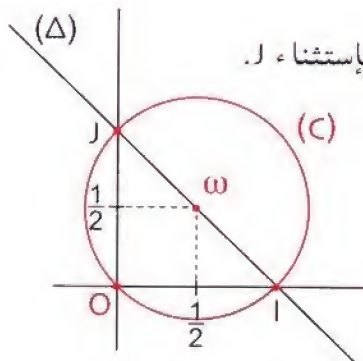
هذه المجموعة هي دائرة (C) مركزها $\omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $O\omega$ باستثناء J.

• مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$

هي مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $x + y - 1 = 0$

باستثناء النقطة $J(0; 1)$.

و هي مستقيم (Δ) معين بالنقطتين $I(1; 0)$ و $J(0; 1)$ باستثناء J.



2 استعمال خواص مرافق عدد مركب

تمرين 1

z عدد مركب. اكتب، بدلالة \bar{z} ، مرافق كل عدد مركب فيما يلي :

$$z_5 = \frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i} \quad , \quad z_4 = \frac{1-z}{1+i\bar{z}} \quad , \quad z_3 = (z-i)(z+3) \quad , \quad z_2 = i(3+z) \quad , \quad z_1 = 1+iz$$

$$\bar{z}_1 = 1 - i\bar{z} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_1 = \overline{1 + iz} = \overline{1 + i\bar{z}} = 1 + i\bar{z} \quad \text{لدينا}$$

$$\bar{z}_2 = -i(3 + \bar{z}) \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_2 = \overline{i(3 + z)} = \overline{i(3 + \bar{z})} = -i(3 + \bar{z})$$

$$\bar{z}_3 = (\bar{z} + i)(\bar{z} + 3) \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_3 = \overline{(z - i)(z + 3)} = \overline{(z - i)(z + 3)} = (\bar{z} - i)(\bar{z} + 3)$$

$$\bar{z}_4 = \frac{1 - \bar{z}}{1 - i\bar{z}} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_4 = \overline{\left(\frac{1 - z}{1 + iz}\right)} = \frac{\overline{1 - z}}{\overline{1 + iz}} = \frac{1 - \bar{z}}{1 + i\bar{z}}$$

$$\bar{z}_5 = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} - i} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_5 = \overline{\left(\frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i}\right)} = \frac{\overline{2z^2 + z - 1}}{\overline{-3z + i}} = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} + i}$$

تمرين 1

حل في \mathbb{C} المعادلتين للمجهول z التاليتين :

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad (2) \quad z = 2\bar{z} - 2 + 6i \quad (1)$$

• حل المعادلة (1) : نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ بعد تعويض كل من z و \bar{z} في (1) .

$$x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i : \text{ تكتب المعادلة (1) :}$$

$$(x - 2) + (-3y + 6)i = 0 \quad \text{و تبسط على الشكل}$$

$$-3y + 6 = 0 \quad \text{و} \quad x - 2 = 0 \quad \text{هذا يعني}$$

$$y = 2 \quad \text{و} \quad x = 2 \quad \text{إذن}$$

و بالتالي $z = 2 + 2i$ و هو حل المعادلة (1) .

• حل المعادلة (2) : نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ نعوض z ، \bar{z} .

$$2(x + iy) + i(x - iy) = 5 - 4i \quad \text{ف نجد (2) في}$$

$$2x + y + i(x + 2y) = 5 - 4i \quad \text{أو} \quad 2x + 2iy + ix - i^2y = 5 - 4i \quad \text{أي أن}$$

$$y = \frac{-13}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{14}{3} \quad \text{و نحل هذه الجملة و نجد} \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

$$z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \quad \text{و يكون حل المعادلة (2) هو}$$

3 التعرف على الشكل الجبري أو الشكل المثلثي أو الشكل الأسّي لعدد مركب غير منعدم

تمرين 1

من بين الأعداد المركبة z التالية ميز بين المكتوبة منها على الشكل الجبري أو على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسّي.

$$z = \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = i \quad ; \quad z = -10$$

$$z = 2e^i \quad ; \quad z = -\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad ; \quad z = \frac{1}{1+i} \quad ; \quad z = \sqrt{2}(i+1)$$

$$z = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z = \sin \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = \cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = 1 + e^{i\pi}$$

$$z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \quad ; \quad z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

حل

نلخص الأجوبة في الجدول التالي :

العدد z	z مكتوب على الشكل الجبري $a + ib$... حيث	z مكتوب على الشكل المثلثي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$	z مكتوب على الشكل الأسّي $re^{i\theta}$... حيث	ملاحظات
- 10	$a = -10 ; b = 0$			
i	$a = 0 ; b = 1$			
$\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$	$a = \cos \frac{\pi}{12}$ $b = \sin \frac{\pi}{12}$	$r = 1 ; \theta = \frac{\pi}{12}$		
$\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$	$a = \sin \frac{\pi}{12}$ $b = \cos \frac{\pi}{12}$			
$\sqrt{2}(i+1)$				z هو جداء عددين مركبين
$\frac{1}{1+i}$				z هو مقلوب عدد مركب
$-\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$				$-\sqrt{2} < 0$
$2e^i$			$r = 2 ; \theta = 1$	

z هو مجموع عددين مركبين				$1 + e^{i\pi}$
$\cos \frac{2\pi}{3} < 0$				$\cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$
	$r = \sin \frac{2\pi}{3}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$			$\sin \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$
$\sqrt{3} - 2 < 0$				$(\sqrt{3} - 2) e^{i\frac{\pi}{4}}$
	$r = 1 ; \theta = -\frac{\pi}{2}$			$e^{-i\frac{\pi}{2}}$
		$r = \sqrt{3} ; \theta = \frac{7\pi}{12}$		$\sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$

4 حساب طويلة وعمدة عدد مركب غير منعدم و كتابته على شكل مثلثي أو شكل أسّي

تمرين 1

احسب الطويلة وعمدة لكل عدد مركب فيما يلي ثم اكتبه على الشكل المثلثي وعلى الشكل الأسّي.

$$z_5 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} \quad ; \quad z_4 = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad z_2 = -10 \quad ; \quad z_1 = -3i$$

$$z_8 = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4} \quad ; \quad z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^8 \quad ; \quad z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

حل

الشكل المثلثي والشكل الأسّي للعدد z_1 : $|z_1| = |-3i| = |-3||i|$ إذن $|z_1| = 3$

$$\arg z_1 = \arg(-3i) + 2k\pi = \arg(-3) + \arg(i) + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_1 = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{إذن}$$

الكتابة $z_1 = -3i$ هي الشكل المثلثي للعدد $3 \left[\cos \left(3\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(3\frac{\pi}{2} \right) \right]$

الكتابة $z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$ هي الشكل الأسّي للعدد z_1 .

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_2 $|z_2| = |-10| = 10$ (لأن z_2 عدد حقيقي).

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_2 = -\pi + k2\pi \quad \text{إذن} \quad \arg z_2 = \arg(-10) + k2\pi$$

الكتابة $10(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$ هي الشكل المثلثي للعدد $z_2 = -10$.

الكتابة $z_2 = 10 e^{-i\pi}$ هي الشكل الأسّي للعدد $z_2 = -10$.

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_3 :

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_3 = 0 + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_3| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = \frac{\pi}{2} e^{i0} : z_3 = \frac{\pi}{2} (\cos 0 + i \sin 0)$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_4 $|z_4| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$z_4 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{إذن}$$

$$z_4 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} : z_4 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{إذن} : \arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi : |z_4| = 2$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_5 :

$$|z_5| = 1 \quad \text{أي} \quad |z_5| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_5 = \arg(-\sqrt{2}) - \arg(1+i) + k2\pi$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و لدينا} : \arg(-\sqrt{2}) = \pi + k2\pi$$

$$\arg z_5 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \text{إذن} \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{أي}$$

$$z_5 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{و} \quad z_5 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{إذن} \quad \arg z_5 = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_5| = 1$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_6 :

$$|z_6| = \sqrt{2} \quad \text{أي} \quad |z_6| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_6 = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1+i) + k2\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$z_6 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} : z_6 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{إذن} \quad \arg z_6 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_6| = \sqrt{2}$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_7 :

$$|z_7| = 16 \quad \text{أي} \quad |z_7| = \left| \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right|^8 = \frac{|\sqrt{3}+i|^8}{|1+i|^8} = \frac{2^8}{(\sqrt{2})^8} = 16$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_7 = 8 \arg \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right) + k2\pi \quad \text{إذن} \quad z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right)^8 \quad \text{لدينا}$$

$$= 8 [\arg(\sqrt{3}+i) - \arg(1+i)] + k2\pi$$

نحسب عمدة للعدد $\sqrt{3}+i$.

$$\sqrt{3}+i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{و} \quad |\sqrt{3}+i| = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و نعلم مما سبق أن} \quad \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و بعد الاختصار نجد} \quad \arg z_7 = 8 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + k2\pi$$

$$z_7 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}} : \quad z_7 = 16 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad \text{فإن} \quad \arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_7| = 16 \quad \text{بما أن}$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد z_8

$$|z_8| = \left| \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4} \right| = \frac{|(1-i)^5|}{|(1-i\sqrt{3})^4|} = \frac{|1-i|^5}{|1-i\sqrt{3}|^4}$$

$$|1-i\sqrt{3}|^4 = 2^4 \quad \text{إذن} \quad |1-i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{و} \quad |1-i|^5 = (\sqrt{2})^5 \quad \text{إذن} \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

$$|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{بعد الاختصار نجد}$$

$$\arg z_8 = \arg(1-i)^5 - \arg(1-i\sqrt{3})^4 + k2\pi \quad \text{لدينا}$$

$$= 5 \arg(1-i) - 4 \arg(1-i\sqrt{3}) + k2\pi$$

نحسب عمدة للعدد $1-i$ و لتكن θ و عمدة للعدد $1-i\sqrt{3}$ و لتكن θ' .

$$\text{لدينا} \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad , \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{إذن} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{و بالمثل} \quad |1-i\sqrt{3}| = 2 \quad , \quad \cos \theta' = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن} \quad \theta' = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{أي أن} \quad \arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\arg z_8 = 5 \left(-\frac{\pi}{4} \right) - 4 \left(-\frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \quad \text{نحسب} \quad \arg z_8$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{بعد الحساب و الاختصار نجد}$$

$$z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{و} \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{إذن} \quad \arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad |z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{لدينا}$$

5 الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

تمرين 1

• أكتب على الشكل الجبري ثم على شكل مثلثي كل عدد مركب مما يلي

$$z_3 = 5 \left(\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right) ; \quad z_2 = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} ; \quad z_1 = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}$$

$$z_5 = \frac{1}{1 + i \tan \frac{\pi}{12}} ; \quad z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12}$$

حل

• كتابة العدد z_1 على الشكل الجبري :

$$z_1 = \frac{-1 - 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + 3i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})}{(10 - 2i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})} = \frac{-28 + 28i\sqrt{3}}{10^2 - (2\sqrt{3})^2} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و بعد الاختصار نجد } z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \quad \text{وهو الشكل الجبري للعدد } z_1.$$

• كتابة العدد z_1 على الشكل المثلثي :

نضع $r = |z_1|$ و θ عمدة للعدد z_1 .

$$\text{لدينا } r = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \quad \text{إذن } r = \frac{1}{2} \quad \text{أي } |z_1| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{كذلك } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{4} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{أي } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{إذن } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{أي } \arg z_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{و بالتالي } z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

• كتابة العدد z_2 على الشكل الجبري :

$$z_2 = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\sqrt{6} + i\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6} + 4i\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و بعد الاختصار نجد } z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

• كتابة العدد z_2 على الشكل المثلثي :

لكتابة z_2 على الشكل المثلثي $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ نحسب r ، $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{و}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{إذن} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

• كتابة العدد z_3 على الشكل الجبري

$$z_3 = 5 \cos \frac{2\pi}{5} - 5 \sin \frac{2\pi}{5} \quad \text{الكتابة} \quad \text{هي على الشكل} \quad a + ib$$

إذن هي الشكل الجبري للعدد z_3 .

ملاحظة : يمكن الاعتماد على الشكل الجبري للعدد z_3 لتعيين الشكل المثلثي له.

ذلك بفرض أن z_3 يكتب على الشكل $z_3 = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث

$$|z_3| = r \quad \arg z_3 = \theta + 2k\pi \quad \text{ثم تعيين كل من } r \text{ و } \theta.$$

$$r = \sqrt{\left(5 \cos \frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(-5 \sin \frac{2\pi}{5}\right)^2} = 5 \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{5} \left(5 \cos \frac{2\pi}{5}\right) = \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{5} \left(-5 \sin \frac{2\pi}{5}\right) = -\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\theta = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{إذن}$$

$$z_3 = \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{5}\right) \right] \quad \text{و بالتالي}$$

• كتابة العدد z_4 على الشكل الجبري :

$$z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} \quad \text{العدد} \quad \text{مكتوب على الشكل} \quad a + ib \quad \text{فهو إذن الشكل الجبري للعدد}$$

$$\tan \frac{17\pi}{12} \quad \text{جزؤه الحقيقي هو } 1 \text{ و جزؤه التخيلي هو } \tan \frac{17\pi}{12}.$$

• كتابة الشكل المثلثي للعدد z_4 :

$$z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} = 1 + \frac{i \sin \frac{17\pi}{12}}{\cos \frac{17\pi}{12}} \quad \text{لدينا}$$

$$z_4 = \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

بما أن العدد $\frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} < 0$ فالكتابة السابقة ليست الشكل المثلثي للعدد z_4 .

$$z_4 = - \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(- \cos \frac{17\pi}{12} - i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \quad \text{بكتابة } z_4 \text{ على الشكل}$$

$$\text{نلاحظ أن } \frac{17\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12} \quad \text{يكون } \cos \frac{17\pi}{12} = - \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{و } \sin \frac{17\pi}{12} = - \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{ينتج أن } z_4 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{وهي الشكل المثلثي للعدد } z_4.$$

• كتابة العدد z_5 على الشكل الجبري :

$$z_5 = \frac{1}{1 + i \tan \frac{\pi}{12}} = \frac{1 - i \tan \frac{\pi}{12}}{(1 + i \tan \frac{\pi}{12})(1 - i \tan \frac{\pi}{12})} = \frac{1 - i \tan \frac{\pi}{12}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{12}} \quad \text{لدينا}$$

$$z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(1 - i \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \right) \quad \text{نعلم أن } \tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \quad \text{و بعد التعويض نجد}$$

$$z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{ينتج أن وهو الشكل الجبري للعدد } z_5$$

$$\text{جزؤه الحقيقي } \cos^2 \frac{\pi}{12} \quad \text{و جزؤه التخيلي } - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

• كتابة العدد z_5 على الشكل المثلثي :

$$z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{أو } z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{بما أن } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \quad \text{فإن } z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) \quad \text{وهو الشكل المثلثي للعدد } z_5.$$

ملاحظة : يمكن اعتبار الشكل الجبري للعدد z_5 وحساب r ، $\cos \theta$ ، $\sin \theta$.

$$\text{ثم كتابة } z_5 \text{ على الشكل } r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{حيث } |z| = r \quad \arg z_5 = \theta + k2\pi$$

$$r = \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{اذن} \quad r^2 = \cos^4 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\sin \theta = \frac{-\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = -\sin \frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$.k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{و بالتالي} \quad \begin{cases} \cos \theta = \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \\ \sin \theta = \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \end{cases} \quad \text{اذن}$$

$$.z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) \quad \text{ينتج أن}$$

تمرين 2

• أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

$$z_4 = (1+i)e^{i\frac{3\pi}{4}} : \quad z_3 = 3ie^{i\pi} : \quad z_2 = (\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}} : \quad z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{4}}$$

حل

• كتابة العدد z_1 على شكل مثلثي :

$$-5 < 0, \quad -5e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ليس الشكل الأسّي للعدد } z_1.$$

$$z_1 = 5e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 5e^{(i\pi + i\frac{\pi}{4})} \quad \text{اذن} \quad -5 = 5e^{i\pi} \quad \text{و} \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$.z_1 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{اذن} \quad z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{أي}$$

$$.z_1 = -5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ملاحظة : يمكن أن نكتب}$$

$$= 5 \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 5 \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$.z_1 = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{و بالتالي}$$

• كتابة العدد z_2 على شكل مثلثي :

$$\sqrt{3}-2 < 0, \quad (\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ليس الشكل الأسّي للعدد } z_2.$$

$$z_2 = -(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}} = (2-\sqrt{3})e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (2-\sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{اذن} \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$.z_2 = (2-\sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{أي}$$

$$.z_2 \quad \text{و بالتالي يكون} \quad z_2 = (2-\sqrt{3}) \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{هو الشكل المثلثي للعدد}$$

• ملاحظة : يمكن كتابة الشكل المثلثي للعدد z_2 دون المرور على الشكل الأسّي له.

• كتابة العدد z_3 على شكل مثلثي :

$$3ie^{i\pi} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\pi} \quad \text{إذن} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

و بالتالي $z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$ إذن $z_3 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_3 .

ملاحظة : العدد z_3 يمكن أن يكتب $z_3 = 3i(-1)$

$$\text{أو} \quad z_3 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \text{و هو الشكل المثلثي للعدد } z_3.$$

• كتابة العدد z_4 على شكل مثلثي :

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{إذن} \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\text{و يكون} \quad z_4 = (1 + i) e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$\text{أي} \quad z_4 = \sqrt{2}e^{i\pi} \quad \text{و هو الشكل الأسّي للعدد } z_4.$$

$$\text{إذن} \quad z_4 = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{و هو الشكل المثلثي للعدد } z_4.$$

6 توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات نقط

تمرين 1

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C, D نقط لواحقها على

$$\text{الترتيب} \quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 4 + 5i, \quad z_3 = 5 - 2i, \quad z_4 = \frac{13}{3} + \frac{8}{3}i$$

1. اثبت أن النقط D, C, B على استقامة واحدة.

2. اثبت أن المستقيمين (AB) و (AC) متعامدان.

حل

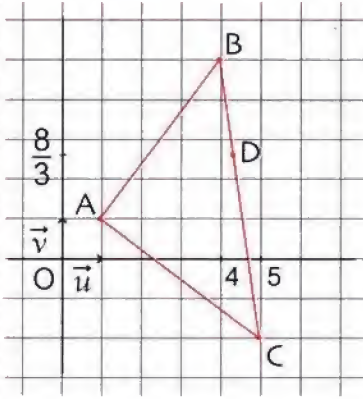
1. النقط D, C, B على استقامة واحدة يعني أن $(\vec{DB}; \vec{DC}) = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{لدينا} \quad (\vec{DB}; \vec{DC}) = \arg \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$$

$$\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = -2 \quad \text{إذن} \quad z_2 - z_4 = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}i \quad \text{و} \quad z_3 - z_4 = \frac{2}{3} - \frac{14}{3}i$$

$$\text{و بالتالي} \quad \arg \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = \arg(-2) = \pi + k2\pi \quad \text{أو} \quad (\vec{DB}; \vec{DC}) = \pi + k2\pi$$

و بالتالي النقط D, C, B على استقامة واحدة.



ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب لاحقتي الشعاعين

$$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB} \text{ ثم ملاحظة أن } z_3 - z_4 = -2(z_2 - z_4)$$

$$\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \text{ أي وبالتالي فالشعاوان } \overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{DB}$$

مرتبطان خطيا. أي أن النقط B، C، D على استقامة واحدة.

2. المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني

$$\text{أن } k \in \mathbb{Z}, (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{لدينا } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{4 - 3i}{3 + 4i} = -i \quad \text{ينتج أن} \quad z_2 - z_1 = 4 + 3i \quad ; \quad z_3 - z_1 = 4 - 3i$$

$$\text{وبالتالي } \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{إذن } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

وبالتالي المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب $AC^2 = |z_3 - z_1|^2 = 25$; $BC^2 = |z_2 - z_1|^2 = 25$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{و التحقق أن} \quad BC^2 = |z_3 - z_2|^2 = 50$$

تمرين 2

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z ثم مثلها بيانيا، في كل حالة مما يلي :

$$|z - 2 + i| = \sqrt{5} \quad \bullet 2$$

$$|z - 3| = |z - 1 - i| \quad \bullet 1$$

$$\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4} \quad \bullet 4$$

$$\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} \quad \bullet 3$$

$$r \geq 0, \quad z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}} \quad \bullet 6$$

$$\arg \frac{z + 1}{z - 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \bullet 5$$

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad z = 1 + i + 2e^{i\theta} \quad \bullet 7$$

حل

1. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 3| = |z - 1 - i|$

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$ وحساب $|z - 3|^2$, $|z - 1 - i|^2$

بدلالة x، y فيكون $|z - 3| = |z - 1 - i|$ يعني $4x - 2y - 7 = 0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة [AB].

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة 3

فإن $z - 3$ هي لاحقة الشعاع \overrightarrow{AM}

و كانت B النقطة ذات اللاحقة $1 + i$ فإن $z - (1 + i)$

هي لاحقة الشعاع \overrightarrow{BM}

لدينا $|z - 3| = |z - (1 + i)|$ يعني $AM = BM$

و بالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$.

2 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$

فيكون $|x - 2 + i(y + 1)| = \sqrt{5}$

أي $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

و هذه الأخيرة معادلة للدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $2 - i$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $2 - i$ فإن $z - (2 - i)$ هي لاحقة الشعاع \overrightarrow{AM}

$|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ يعني $AM = \sqrt{5}$

مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

3 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$

لدينا $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

يعني $z - 3i$ تخيلي صرف أو أيضا

$\mathcal{R}(z - 3i) = 0$ و $\text{Im}(z - 3i) \geq 0$ (*)

إذا فرضنا أن $z = x + iy$ فإن $z - 3i = x + i(y - 3)$

و تكتب الجملة (*) كما يلي $x = 0$ و $y \geq 3$

و تكون المجموعة المطلوبة هي $[Ay]$ (كما في الشكل).

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $3i$ فإن $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \arg(z - 3i)$

إذن النقطة M تحقق $(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

مجموعة النقط M هي نقط الجزء $[Ay]$ من محور الترتيب الذي لا يشمل المبدأ.

4 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$ (*)

نعلم أن $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد $1 + i$ إذن $\arg(z - 2 + i) = \arg(1 + i) + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\arg(z - 2 + i) - \arg(1 + i) = k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

أو أيضا $\arg\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = k2\pi$ و بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق العلاقة (*)

هي مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها العدد $\frac{z-2+i}{1+i}$ حقيقيا موجبا

أي $\operatorname{Re}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) \geq 0$ و $\operatorname{Im}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = 0$

نضع $z = x + iy$ فيكون $\frac{z-2+i}{1+i} = \frac{1}{2} [x+y-1+i(-x+y+3)]$

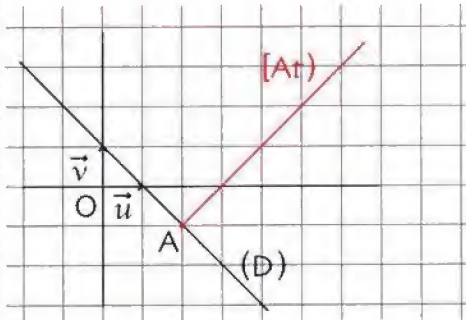
و تكون مجموعة النقط $M(x; y)$ المطلوبة هي التي تحقق

$$\begin{cases} -x+y+3=0 \\ x+y-1 \geq 0 \end{cases}$$

و هي نصف المستقيم $[At)$ الذي مبدؤه

النقطة $A(2-i)$ و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (D) و الذي لا يشمل O .



ملاحظة : إذا فرضنا أن A النقطة ذات اللاحقة $2-i$ فإن $(\vec{i}; \vec{AM}) = \arg(z - (2-i))$

و بالتالي $(\vec{i}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف المستقيم (Δ) الذي متدؤه النقطة A (كما في الشكل).

5. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

من أجل $z \neq 2i$ نكتب

$\arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $\frac{z+1}{z-2i}$ تخيلي صرف.

نضع $z = x + iy$ و نكتب العدد $\frac{z+1}{z-2i}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{(x+1)x + y(y-2) + i(2x-y+2)}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{i(2x-y+2)}{x^2 + (y-2)^2}$$

لدينا

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = 0 \text{ يعني } \frac{z+1}{z-2i} \text{ تخيلي صرف}$$

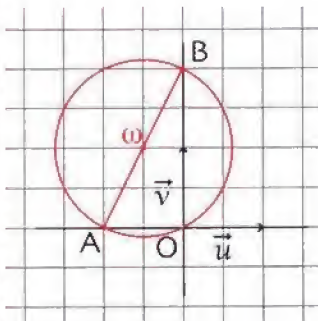
إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

و هي الدائرة التي مركزها $\omega(-\frac{1}{2}; 2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ باستثناء $B(0; 2)$.

ملاحظة : نفرض النقطتين $A(-1)$ و $B(2i)$.

$$(\vec{BM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يعني } \arg \frac{z-(-1)}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء B .



6. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$

نضع $z = x + iy$ و $x + iy = 1 + i + r\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ينتج أن

$$\begin{cases} x - 1 = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} & \text{أو أيضا} \\ x \geq 1 & \text{و } y \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}r \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{cases} ; r \geq 0$$

إذن المجموعة المطلوبة هي نصف المستقيم (ωt)

الذي مبدؤه $\omega(1 + i)$ و $\vec{S}(e^{i\frac{\pi}{3}})$ شعاع توجيه له.

7. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

نضع $z = x + iy$ إذن $x + iy = 1 + i + 2(\cos \theta + i \sin \theta)$

نستنتج أن $\begin{cases} x - 1 = 2 \cos \theta \\ y - 1 = 2 \sin \theta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases}$

و نجد $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta$

أي $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

المجموعة المطلوبة هي الدائرة التي مركزها $\omega(1 + i)$ و نصف قطرها 2.

7 توظيف دستور موافر و ترميز أولير لحل مسائل

تمرين 1

عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $z = (\sqrt{3} + i)^n$ حقيقيا . تخيليا صرفا .

حل

العدد $\sqrt{3} + i$ مكتوب على الشكل الجبري.

لنكتب هذا العدد على الشكل المثلثي أي $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

فيكون $z = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n$

حسب دستور موافر $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n = \cos n \frac{\pi}{6} + i \sin n \frac{\pi}{6}$ أي $z = \left(\cos n \frac{\pi}{6} + i \sin n \frac{\pi}{6}\right)$

z عدد حقيقي يعني $\text{Im}(z) = 0$ و $\text{Im}(z) = 2^n i \sin n \frac{\pi}{6}$

إذن $\sin n \frac{\pi}{6} = 0$ أي $\sin n \frac{\pi}{6} = \sin(0)$

وبالتالي $n \frac{\pi}{6} = k\pi$ أو $n = 6k$: $k \in \mathbb{N}$
 نستنتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا وفقط إذا كان $n = 6k$: $k \in \mathbb{N}$.

• z عدد تخيلي صرف يعني $\operatorname{Re}(z) = 0$ و $\operatorname{Re}(z) = 2^n \cos n \frac{\pi}{6}$

إذن $\cos n \frac{\pi}{6} = 0$ أو $\cos n \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2}$

وبالتالي $n \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $n = 3 + 6k$: $k \in \mathbb{N}$

ينتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا وفقط إذا كان $n = 3 + 6k$: $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 2

أكتب على الشكل الخطي الأعداد التالية :

$$\cos^2 x : \sin^2 x : \cos^3 x : \sin^3 x$$

حل

لكتابة الأعداد $\cos^2 x : \sin^2 x : \cos^3 x : \sin^3 x$ على الشكل الخطي،

نستعمل قانوني أولير $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$: $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

• لدينا $\cos^2 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{4}(2 \cos 2x + 2)$

وبالتالي $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

• لدينا $\sin^2 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right]^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) = -\frac{1}{4}(2 \cos 2x - 2)$

وبالتالي $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

• لدينا $\cos^3 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right]^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$$= \frac{1}{8}[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})] = \frac{1}{8}(2 \cos 3x + 6 \cos x)$$

وبعد التبسيط و الاختصار نجد $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$

• لدينا $\sin^3 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right]^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$

$$= -\frac{1}{8i}[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})] = -\frac{1}{8i}(2i \sin 3x + 6i \sin x)$$

وبعد التبسيط و الاختصار نجد $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$

تمرين 3

عبر عن $\sin 3x$ و $\cos 3x$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

حل

نحسب $(\cos x + i \sin x)^3$ بطريقتين :

بإستعمال دستور موافر نجد $(\cos x + i \sin x)^3 = \sin 3x + i \cos 3x$.

و بإستعمال دستور ثنائي الحد نجد

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

$$\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

اذن

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

ينتج أن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

نعلم أن

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{و} \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

و بالتالي

8 تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب

تمرين 1

احسب الجذرين التربيعيين للعدد $z = 1 + i\sqrt{3}$

حل

العدد z يكتب على الشكل المثلثي $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

نفرض أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد z يكتب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ إذن

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{أو} \quad [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} \\ r^2 = 2 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$2\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{أو} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \quad 2\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{أو} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{اذن} \quad k \in \mathbb{Z} : \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2}$$

$$z_k = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \right] \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ جذر للعدد } z$$

و نحصل على الجذرين التربيعيين z_1, z_0 للعدد المركب z من أجل $k=0$ و $k=1$ وهما :

$$z_1 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \right] \quad ; \quad z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(z_1 = -z_0) \quad , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أي}$$

ملاحظة : لدينا $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و يكون الجذران التربيعيان للعدد z هما $z_1 = -z_0$ ، $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

تمرين 2

عين الجذرين التربيعيين العدد المركب z حيث $z = -8 - 6i$

حل

$$\text{نضع } z = x + iy$$

$$z^2 = z \text{ جذر تربيعي للعدد } z \text{ يعني}$$

$$\text{أي أن } (x + iy)^2 = -8 - 6i \text{ و بالتالي} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$\text{هذه الجملة تبسط على الشكل التالي} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\text{بحل هذه الجملة بطريقة الجمع، نجد } x^2 = 1 \text{ و } y^2 = 9 \text{ و } xy < 0$$

$$\text{ينتج أن } (x=1 \text{ و } y=-3) \text{ أو } (x=-1 \text{ و } y=3)$$

$$\text{و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب } -8 - 6i \text{ هما } 1 - 3i \text{ و } -1 + 3i$$

9 معادلة من الدرجة الثانية في \mathbb{C}

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0$

حل

$$\text{لدينا } \Delta' = [-2(i-1)]^2 - 2(4-i) \text{ بعد الاختصار نجد } \Delta' = -8 - 6i$$

بما أن Δ' عدد مركب غير منعدم فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في \mathbb{C} .

طرائق

إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ' هما δ' و $-\delta'$ حيث $\delta' = 1-3i$ (إرجع إلى التمرين السابق) فإن حلي المعادلة هما $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} = 2(1-i) + (1-3i) = 3-5i$ و $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a} = 2(1-i) - (1-3i) = 1+i$

تمرين 2

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$

حل

ميز المعادلة هو $\Delta = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -4$ أي $\Delta = 4i^2 = (2i)^2$

Δ عدد حقيقي و $\Delta < 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 حيث $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = \bar{z}_1$

10 معادلات يؤول حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C}

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$

حل

نضع $t = z^2$ فيكون $t^2 - 6t + 25 = 0 \dots (1)$

حساب Δ' : لدينا $\Delta' = 9 - 25 = -16 = -16i^2$ فيكون جذرا Δ هما $4i$ و $-4i$.

للمعادلة (1) حلان هما $t = 3 + 4i$ أو $t = 3 - 4i$.

وبالتالي $z^2 = 3 + 4i$ أو $z^2 = 3 - 4i$.

تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$.

العدد المركب $\alpha + i\beta$ حيث α, β عددان حقيقيان، جذر تربيعي للعدد $3+4i$.

يعني $(\alpha + i\beta)^2 = 3 + 4i$ أو $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 3 + 4i$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 & \text{إذن } |\alpha + i\beta|^2 = |3 + 4i| \\ 2\alpha\beta = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

ينتج أن $2\alpha^2 = 8$ و $2\beta^2 = 2$ و $\alpha\beta > 0$

جذرا $3+4i$ هما $z_1 = 2+i$ و $z'_1 = -z_1$

بنفس الطريقة نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $3-4i$ و هما $z_2 = 2+i$ و $z'_2 = -z_2$.

ملاحظة: بما أن $\overline{3+4i} = 3-4i$ إذن الجذران التربيعيين للعدد $3-4i$ هما مرافقا الجذرين

التربيعيين للعدد $3+4i$. (وهما $2+i$ و $-2-i$).

تمرين 2

حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z .

$$(*) \dots\dots\dots z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0 \text{ علما أنها تقبل حلا حقيقيا } a.$$

حل

بما أن a حل للمعادلة $(*)$ فإن $a^3 - (3+4i)a^2 - 4(1-3i)a + 12 = 0$

$$\text{أي } a^3 - 3a^2 - 4a + 12 + i(-4a^2 + 12a) = 0$$

$$\text{إذن } \begin{cases} a^3 - 3a^2 - 4a + 12 = 0 \\ -4a^2 + 12a = 0 \end{cases}$$

هذه الجملة تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} هو 3.

إذن $a = 3$ هو الحل الحقيقي للمعادلة $(*)$.

و بالتالي يمكن تحليل العبارة $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$ على الشكل

$$(z-3)(z^2 + pz + q) \text{ حيث } p \text{ و } q \text{ عددان مركبان.}$$

بنشر $(z-3)(z^2 + pz + q)$ ومقارنته بالعبارة $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} p - 3 = -3 - 4i \\ q - 3p = -4 + 12i \\ -3q = 12 \end{cases} \text{ ونجد } p = -4i \text{ و } q = -4$$

إذن المعادلة $(*)$ تكتب على الشكل $(z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0$

لحل المعادلة $z^2 - 4iz - 4 = 0$ نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $\Delta' = -8 = 8i^2$.

ونجد $2i\sqrt{2}, -2i\sqrt{2}$ ثم نحسب الحلين z_1 و z_2 .

$$\text{ونجد } z_1 = 2i + 2i\sqrt{2}$$

$$= 2(1 + \sqrt{2})i$$

$$z_2 = 2i - 2i\sqrt{2}$$

$$= 2(1 - \sqrt{2})i$$

و نستخلص أن للمعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$ ثلاثة حلول في \mathbb{C} هي :

$$z_2 = 2(1 - \sqrt{2})i \quad ; \quad z_1 = 2(1 + \sqrt{2})i \quad ; \quad z_0 = 3$$

11 تعيين الكتابة المركبة لتحويل نقطي

تمرين 1

- المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. عبر بالأعداد المركبة عن التحويلات النقطية التالية :
- الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} (2+i)$. • الانسحاب الذي شعاعه \vec{AB} حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$.
 - الدوران الذي مركزه $\omega(1-2i)$ ، و زاويته $\frac{\pi}{4}$.
 - الدوران الذي مركزه $\omega(1+i)$ ، و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
 - التناظر الذي مركزه $\omega(2i)$.
 - التحاكي الذي مركزه $\omega(2+i)$ ، و نسبته 3.

حل

• الانسحاب $t_{\vec{v}}$ حيث $\vec{v} (2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z + 2 + i$

• الانسحاب $t_{\vec{AB}}$ حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z + z_B - z_A$

$$z' = z + 2 - 4i$$

• الدوران $\pi_{(\omega; \frac{\pi}{4})}$ حيث $\omega(1-2i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{4}} (z - (1-2i))$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) z + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right) i$$

• التناظر S_{ω} حيث $\omega(2i)$ هو الدوران $\pi_{(\omega; \pi)}$ (أو التحاكي $h_{(\omega; -1)}$).

$$\text{إذن } z' - 2i = e^{i\pi} (z - 2i) \text{ أي } z' = -z + 4i$$

• الدوران $\pi_{(\omega; \frac{\pi}{2})}$ حيث $\omega(1+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - (1+i))$ أو $z' = iz + 2$

• التحاكي $h_{(\omega; 3)}$ حيث $\omega(2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' - (2+i) = 3(z - (2+i))$ أو $z' = 3z - 4 - 2i$

12 التعرف على تحويل نقطي إنطلاقاً من كتابته المركبة

تمرين 2

ميز كل تحويل نقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$$z' = -3z - 2 + 4i \quad \bullet \quad 3$$

$$z' = z + 2 + 4i \quad \bullet \quad 1$$

$$z' = -z + 2 \quad \bullet \quad 4$$

$$z' = -iz - 2i \quad \bullet \quad 2$$

حل

1 • لكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$$z' = z + 2 + 4i \text{ من الشكل } z' = z + b \text{ حيث } b \in \mathbb{C}$$

إذن هذا التحويل النقطي هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}(2+4i)$.

2. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = -iz - 2i$ من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a| = 1$.

إذن هذا التحويل هو دوران زاويته θ حيث $\theta = \frac{3\pi}{2}$ لأن $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$. مركز هذا الدوران هي النقطة ω لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-1-i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = -iz - 2i$.

هو الدوران الذي مركزه $\omega(-1-i)$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

3. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -3z - 2 + 4i$ من الشكل $z' = kz + b$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

إذن هذا التحويل النقطي تحاك نسبته k حيث $k = -3$.

مركز هذا التحاكي هي النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-\frac{1}{2} - i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = -3z - 2 + 4i$.

هو التحاكي الذي مركزه $\omega(-\frac{1}{2} - i)$ و نسبته -3 .

4. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -z + 2$ من الشكل $z' = -z + b$ حيث $b \in \mathbb{C}$ هو التناظر الذي مركزه $\omega(z_0)$

حيث $z_0 = -z_0 + 2$ أي $z_0 = 1$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$.

هو التناظر الذي مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

ملاحظة : التحويل النقطي $M(z) \mapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$

هو أيضا تحاك نسبته -1 و مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

كما يعتبر هذا التحويل دورانا مركزه ω ذات اللاحقة 1 و زاويته π .

تمارين و حلول نموذجية

مسألة 1

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

z عدد مركب يختلف عن $-i$ و Z عدد مركب حيث $Z = \frac{z+2i}{1-iz}$.

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى ثم مثلها بيانيا في كل حالة مما يلي

1. Z عدد حقيقي.

2. $-\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z .

3. $Z = z$.

4. النقط $A(i)$ ، $M(z)$ ، $N(Z)$ على استقامة واحدة.

5. $N(Z)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$.

حل

1. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z حقيقيا.

نكتب Z على الشكل الجبري، نضع $z = x + iy$: $Z = \frac{z+2i}{1-iz} = \frac{x+iy+2i}{1-iz}$

$$= \frac{[x+iy+2i][1+y+ix]}{(1+y-ix)(1+y+ix)} = \frac{x(1+y) - x(y+2) + i[(y+1)(y+2) + x^2]}{(1+y)^2 + x^2}$$

بعد الاختصار نجد $Re(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2}$ و $Im(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$

Z عدد حقيقي يعني $Im(Z) = 0$ أي أن $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq -1$

$$\text{أو } x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ حيث } x \neq 0 \text{ و } y \neq -1.$$

اذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة $-\frac{3}{2}i$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة c ذات اللاحقة $-i$ (الشكل).

ملاحظة : يمكن الحل بالطريقة التالية : Z عدد حقيقي يعني $Z = \bar{Z}$.

$$\text{أي } \frac{z+2i}{1-iz} = \frac{\bar{z}-2i}{1+i\bar{z}} \quad (z \neq -i)$$

$$\text{أو } (z+2i)(1+i\bar{z}) = (1-iz)(\bar{z}-2i)$$

بعد إجراء الحساب و الاختصار نجد $3(z - \bar{z}) + 2iz\bar{z} + 4i = 0$

بوضع $z = x + iy = 0$ نجد $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

حيث $x \neq 0$ و $y \neq -1$ و هي المجموعة المذكورة آنفا.

2. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $-\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z .

يعني Z عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

أو $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$ يعني $\operatorname{Re}(Z) = 0$ و $\operatorname{Im}(Z) < 0$

لدينا مما سبق $\operatorname{Re}(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2} ; \operatorname{Im}(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$

إذن $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$ يعني $\begin{cases} x=0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ حيث $(x; y) \neq (0; -1)$.

يعني $\begin{cases} x=0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ أو $x=0$ و $-1 < y < -2$

إذن المجموعة المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.

ملاحظة يمكن استعمال اعتبارات هندسية لتعيين المجموعة المطلوبة.

نكتب Z على الشكل $Z = i \frac{z - (-2i)}{z + i}$

نعتبر النقط $M(z) ; B(-2i) ; C(-i)$.

فيكون $\arg Z = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$.

لدينا $\arg z = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$.

إذن $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$.

وبالتالي $(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = \pi + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$.

ونحصل على المجموعة المذكورة سابقا وهي القطعة المستقيمة

$[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.

3. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $Z = z$.

يعني $Z = z$ أي $(z \neq -i) ; \frac{z + 2i}{1 - iz} = z + 2i$

وبعد الاختصار نحصل على المعادلة $z^2 + 2 = 0$ أو $z^2 = -2$.

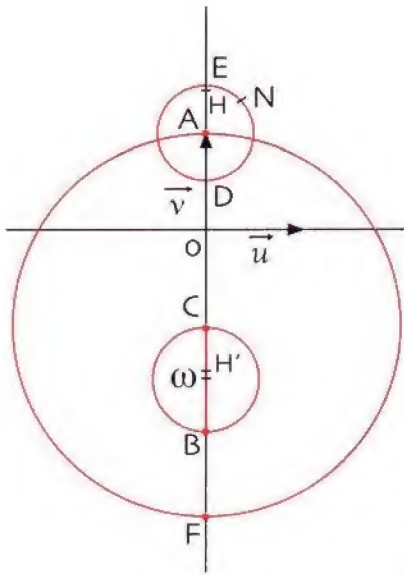
هذه المعادلة تقبل حلين هما $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$.

إذن المجموعة المطلوبة متكونة من النقطتين $H(i\sqrt{2}) ; H'(-i\sqrt{2})$.

4. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $A(i) ; M(z) ; N(Z)$ على استقامة واحدة

النقط $A ; M ; N$ على استقامة واحدة يعني $\widehat{NAM} = k\pi$.

يعني $\widehat{NAM} = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ أو $(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{AM}) = \pi + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$.



تمارين و حلول نموذجية

أي أن $\arg \frac{z-i}{z-i} = k2\pi$ أو $\arg \frac{z-i}{z-i} = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

أي أن $\frac{z-i}{z-i} \in \mathbb{R}$ و $z \neq i$ و $z \neq -i$

أو أيضا $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-i}\right) = 0$

لنكتب عبارة $\frac{z-i}{z-i}$ بشكل بسيط بعد تعويض z .

$$\frac{z-i}{z-i} = \frac{z-i}{\frac{z+2i}{1-iz} - 1} = \frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-i(1-iz)} = -(z^2+1)$$

إذن $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-i}\right) = 0$ يعني $\operatorname{Im}(-z^2-1) = 0$ أو أيضا $\operatorname{Im}(z^2+1) = 0$

بوضع $z = x + iy$ يكون $z^2+1 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy$

إذن $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-i}\right) = 0$ يعني $xy = 0$ مع $(x; y) \neq (0; 1)$ و $(x; y) \neq (0; -1)$

خلاصة: مجموعة النقط M من المستوي التي من أجلها يكون N, M, A على استقامة واحدة هي مجموعة نقط محور الفواصل و نقط محور الترتيب باستثناء النقطتين C, A .

5. تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها تنتمي $N(z)$ إلى الدائرة $\left(A; \frac{1}{2}\right)$.

ليكن $[DE]$ قطرا للدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ حيث $D\left(\frac{i}{2}\right), E\left(\frac{2i}{3}\right)$.

من أجل كل نقطة N من هذه الدائرة $\widehat{DNE} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

هذا يعني $(\overline{DN}; \overline{EN}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ أو $(\overline{DN}; \overline{EN}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ولدينا أيضا: $(\overline{DN}; \overline{EN}) = \arg \frac{z-\frac{3i}{2}}{z-\frac{1}{2}} + 2k\pi$ مع $z \neq \frac{1}{2}$ و $z \neq \frac{3i}{2}$

لنحسب $\frac{z-\frac{3i}{2}}{z-\frac{1}{2}}$ بدلالة z : $\frac{z-\frac{3i}{2}}{z-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{z+2i}{z-iz} - \frac{3i}{2}}{\frac{z+2i}{z-iz} - \frac{1}{2}} = \frac{-z+i}{z+3i} = -\frac{z-i}{z-(-3i)}$

$\arg \frac{z-\frac{3i}{2}}{z-\frac{1}{2}} = \arg\left(\frac{z-i}{z-(-3i)}\right) = \arg(-1) + \arg \frac{z-i}{z-(-3i)} = \pi + \arg \frac{z-i}{z-(-3i)} + k2\pi$

و باعتبار النقط $F(-3i), A(i), M(z)$ يكون $(\overline{DN}; \overline{EN}) = \pi + (\overline{FM}; \overline{AM}) + k2\pi$

إذن $\pi + (\overline{FM}; \overline{AM}) + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ أو $\pi + (\overline{FM}; \overline{AM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

أي $(\overline{FM}; \overline{AM}) = -\frac{\pi}{2} + \pi + k2\pi$ أو $(\overline{FM}; \overline{AM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

إذن مجموعة النقط M التي تكون من أجلها N تنتمي إلى الدائرة $\mathbb{E}(A; \frac{1}{2})$ هي الدائرة التي قطرها $[FA]$ باستثناء النقطتين A, F . (الشكل).

ملاحظة: يمكن اعتبار العدد $\frac{-z+i}{z+3i}$ (أي $\frac{z-\frac{3}{2}i}{z-\frac{1}{2}i}$) تخيليا صرفا، و تعيين مجموعة النقط التي تحقق $\operatorname{Re}\left(\frac{-z+i}{z+3i}\right)=0$ ، وهي المجموعة المطلوبة.

مسألة 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. M, L, K نقط لواحقها على الترتيب

$$z_M = -i\sqrt{3}, \quad z_L = 1 - i, \quad z_K = 1 + i$$

1. عين N صورة النقطة L بالتحاكي h الذي مركزه M ونسبته 2.

2. الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A و يحول N إلى C عين اللاحقتين z_C, z_A للنقطتين C, A .

3. الانسحاب الذي شعاعه \vec{v} ذو اللاحقة $2i$ يحول M إلى D و يحول N إلى B . عين اللاحقتين z_B, z_D للنقطتين B, D على الترتيب.

4. أثبت أن النقطة K هي مركز تناظر الرباعي $ABCD$.

5. احسب $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$ ، استنتج طبيعة الشكل الرباعي $ABCD$.

حل

1. صورة النقطة L (و هي N) بالتحاكي h الذي مركزه M ونسبته 2 تحسب كالتالي :

$$z_N = 2z_L - z_M \text{ أو } z_N - z_M = 2(z_L - z_M)$$

بعد تعويض z_M, z_L والتبسيط نجد $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

2. صورة M (و هي A) بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_M = i z_M$$

بعد تعويض z_M نجد $z_A = i(-i\sqrt{3})$ إذن $z_A = \sqrt{3}$.

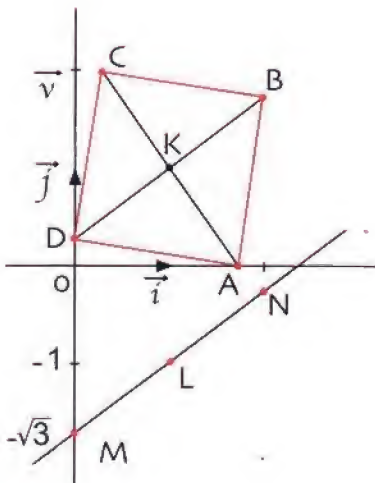
وبنفس الطريقة نحسب z_C ونجد $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3. صورة M (و هي D) بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{v}(2i)$

$$z_D = (2 - \sqrt{3})i \text{ أي } z_D = z_M + 2i$$

وبنفس الطريقة نعين صورة N (و هي B) بالانسحاب t

$$\text{ونجد } z_B = z_N + 2i \text{ أي } z_B = 2 + i\sqrt{3}$$



تمارين و حلول نموذجية

4. البرهان على أن النقطة K مركز تناظر الرباعي ABCD.

من أجل ذلك نبرهن أن A و C متناظرتان بالنسبة إلى K وكذلك B و D.

A و C متناظرتان بالنسبة إلى K يعني K منتصف القطعة المستقيمة [AC].

لاحقة منتصف [AC] هي $\frac{1}{2}(z_A + z_C)$ حيث $1 + i = \frac{1}{2}[\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3} + 2i)]$ إذن لاحقة منتصف [AC] هي لاحقة K أي K هي منتصف [AC].

لاحقة منتصف [BD] هي $\frac{1}{2}(z_B + z_D)$ حيث

$$\frac{1}{2}(z_B + z_D) = \frac{1}{2}[2 + i\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i] = 1 + i$$

إذن لاحقة منتصف [BD] هي لاحقة K أي K هي منتصف [BD] أيضا، هذا يعني أن قطري

الرباعي ABCD لهما نفس المنتصف K، وبالتالي K مركز تناظر ABCD.

5. حساب $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$ لدينا
$$\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} = \frac{(2 + i\sqrt{3}) - (1 + i)}{\sqrt{3} - (1 + i)} = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1) - i}$$

$$= \frac{[1 + i(\sqrt{3} - 1)][\sqrt{3} - 1 + i]}{(\sqrt{3} - 1 - i)(\sqrt{3} - 1 + i)}$$

و بعد التبسيط والاختصار نجد $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} = i$ أو $z_B - z_K = i(z_A - z_K)$

و العبارة الأخيرة هي عبارة الدوران الذي مركزه K وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول النقطة A إلى النقطة B

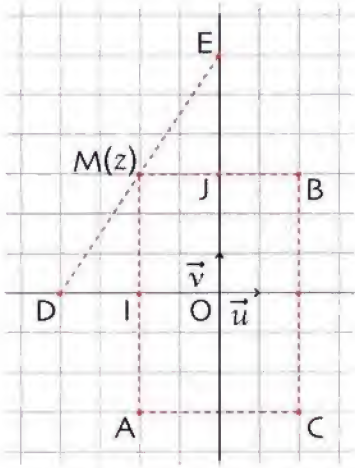
إذن $KA = KB$ و $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

بما أن قطري الرباعي ABCD متقايسان ومتعامدان فإن الرباعي ABCD مربع.

تمارين و مسائل

$$z - \bar{z} : z + \bar{z} : -\bar{z} : \bar{z} : -z$$

$$\frac{1}{2}(z - \bar{z}) : \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$



كتابة عدد مركب على الشكل الجبري

9 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل

$$z_2 = (1 + i)(2 - 3i) : z_1 = i + (2 + i)$$

$$z_4 = (3 + i)^2 : z_3 = (1 + i)(1 - i)$$

$$z_6 = (2 + 3i)^2 - (i - 1)^2 : z_5 = (2 - 5i)^2$$

10 نفس السؤال السابق.

$$z_1 = \frac{2 - 5i}{3 + i}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - 2i}$$

$$z_3 = \frac{4 + 3i}{2 - i} + \frac{1 + i}{2 + i}$$

11 x عدد حقيقي و z عدد مركب حيث

$$z = x + 2 - i(ix + 3) - 2i + 5ix$$

• اكتب بدلالة x الجزء الحقيقي $Re(z)$ و الجزء

التخيلي $Im(z)$ للعدد z .

• استنتج قيم x التي يكون من أجلها

z حقيقيا . z تخيليا صرفا .

الحساب بالاعداد المركبة

1 أعدد مركبة حيث z_3, z_2, z_1

$$z_3 = -2 + 3i : z_1 = -1 + 4i : z_2 = 2 + i$$

$$3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 : z_1 + z_2 + z_3$$

$$(z_1 \cdot z_2)^2 : z_1^2 : \frac{1}{z_3} : \frac{z_1}{z_2} : z_1 \cdot z_2$$

$$2 \text{ اثبت أن } \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 1$$

3 حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z

$$z - i = 4z + i(z - 2)$$

4 احسب i^{1947}, i^4, i^3, i^2

استنتج حساب i^n تبعا لقيم العدد الطبيعي n .

مرافق عدد مركب

5 عين مرافق كل من

$$z_2 = -3i + i(2i - 1) : z_1 = i(3 + 2i)$$

$$z_4 = (1 - 2i)^{10} : z_3 = \frac{2i - 1}{3 + 2i}$$

6 z عدد مركب حيث $z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$

• احسب $z + \bar{z}$ و $z - \bar{z}$.

• استنتج $Re(z)$, $Im(z)$.

7 ميز الأعداد الحقيقية و الأعداد التخيلية

$$z - \bar{z} : z + \bar{z}$$

$$2 + z\bar{z} : 3 + z^2 : iz^2(\bar{z})^2$$

$$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) : (z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$$

8 z لاحقة النقطة M .

استعمل الشكل التالي لتحديد لاحقة كل نقطة من

النقط A, B, C, D, E, I, J من بين الأعداد المركبة

التالية :

تمارين و مسائل

17 مثل بيانيا في مستو منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ مجموعة النقط M

ذات اللاحقة z حيث.

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (\text{أ})$$

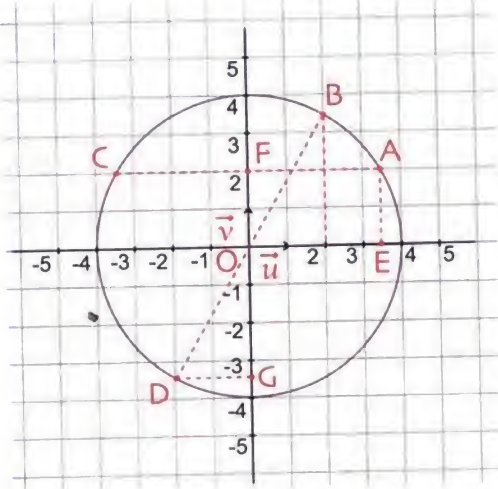
$$|z| = 2 \quad (\text{ب})$$

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z| = 2 \quad (\text{ج})$$

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

(أ) عين الطويلة و عمدة لكل لاحقة من لواحق النقط

A, B, C, D, E, F, G الممثلة في الشكل التالي



(ب) انشئ في المستوي السابق النقط L, K, H

$$4e^{i\frac{7\pi}{6}}, 4e^{i\frac{5\pi}{3}}, 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

على الترتيب.

19 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ ونقط لواحقها على الترتيب

$$z, 3i, 2$$

$$\left| \frac{z-3i}{2-3i} \right| = 1 \quad \text{فسر هندسيا كلا من العلاقتين :}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg \left(\frac{z-3i}{2-3i} \right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{و}$$

انشئ الشكل المناسب لمجموعة النقط $M(z)$.

كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسّي

12 عين الطويلة و عمدة لكل عدد مركب مما يلي

ثم اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسّي.

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z = \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$$

$$z = -\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$$

13 نفس السؤال السابق.

$$z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad z = \frac{\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}}$$

$$z = (-1+i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) \quad ; \quad z = (1+i\sqrt{3})^4$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-3i}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})^3} \quad ; \quad z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \right)^3$$

14 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل

المثلثي و على الشكل الأسّي.

$$z_2 = 2 + 2i \quad ; \quad z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} \quad ; \quad z_3 = z_1 \cdot z_2$$

$$z_5 = z_1^3 \cdot z_2^4$$

15 اكتب العدد المركب z حيث

$$z = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}} \quad \text{على الشكل المثلثي.}$$

الطويلة و العمدة

16 z عدد مركب حيث

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

احسب z^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

استنتج طويلة z و عمدة له.

تمارين و مسائل

الاعداد المركبة و الهندسة

بالنسبة للتمارين من 20 إلى 24 نرود المستوى بمعلم متعامد و متجانس $(\vec{u}, \vec{v}; O)$.

20 نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z .

عين في كل حالة مجموعة النقط $M(z)$ حيث

(أ) $|4iz + 12| = 4|z + 1 - i|$

(ب) $|iz - 3| = |z + i|$

(ج) $|z + 5i| = 3$

(د) $|iz - 3| = 4$

(هـ) $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

(و) $|iz + 3| = |z + 2i|$

21 نفس السؤال السابق.

(أ) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

(ب) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(ج) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = k2\pi$

(د) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = k\pi$

22 نفس السؤال السابق

(أ) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(ب) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z + 1) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

(ج) $k \in \mathbb{Z} : \arg(z - i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

23 نفس السؤال السابق.

(أ) $k \in \mathbb{Z} : \arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(ب) $k \in \mathbb{Z} : \arg(iz) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

(ج) $k \in \mathbb{Z} : \arg(-z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

24 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

بحيث يكون

(أ) $\frac{z-1}{z+2i}$ حقيقيا.

(ب) $\frac{z-1}{z+2i}$ تخيليا صرفا.

(ج) $k \in \mathbb{Z} : \arg \frac{z-1}{z+2i} = k\pi$

(د) $k \in \mathbb{Z} : \arg \frac{z-1}{z+2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

25 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(\vec{u}, \vec{v}; O)$ ، أنشئ مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z حيث

(أ) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

(ب) $\operatorname{Im}(z^2) = 1$

(ج) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ و $\operatorname{Im}(z^2) = 1$

26 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل

حالة من الحالتين التاليتين

(أ) $(\bar{z} - 1)(z + 2)$ عدد حقيقي.

(ب) العدد $\frac{z-2i}{z+4i}$ حيث $z \neq -4i$ حقيقي.

27 نفس السؤال السابق.

(أ) العدد $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ حقيقي.

(ب) العدد $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ تخيلي صرف.

28 A, B, C نقط لآحقاتها على الترتيب

$z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_A = -1 - i$

1. احسب قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$.

2. استنتج أن المستقيمين (CA) ، (CB) متعامدان.

29 نفس السؤال من أجل (AC) و (AB) حيث

$z_C = 5 + 2i$ ، $z_B = 4 - 5i$ ، $z_A = 1 - i$

تمارين و مسائل

$$2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$$

(ج) لتكن المعادلة ذات المجهول z في \mathbb{C}

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0$$

أوجد الحل الحقيقي لهذه المعادلة ثم الحلين الآخرين.

37 حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة

$$z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$$

التحويلات النقطية و الاعداد المركبة

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

38 A, B نقطتان لاحقاتهما على الترتيب

$$2 - 4i \text{ و } -1 - i.$$

(أ) عين لاحقة النقطة C صورة A بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته -2.

(ب) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران

الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

(ج) عين لاحقة النقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه \overline{AB} .

(د) عين معاملات للنقط A, B, C حتى يكون مرجحها النقطة O.

39 ميز في كل حالة مما يلي التحويل النقطي

الذي يحول كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث

$$(أ) z' = iz + 3 - i$$

$$(ب) z' = 2z - 3i$$

$$(ج) z' = z + 1 + i$$

$$(د) z' = -z + i$$

40 عين طبيعة التحويل النقطي الذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$$z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} z + \sqrt{3} - i$$

30 A, B, C نقط لاحقاتها على الترتيب

$$z_C = \frac{7}{3} - 6i, z_B = 1 - 2i, z_A = -\frac{1}{3} + 2i$$

1. احسب قياسا للزاوية $(\overline{AB}; \overline{AC})$.

2. استنتج أن المستقيمين (AB), (AC) متوازيان.

دستور مواظر و ترميز أولير

31 احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$$(\cos x + i \sin x)^2$$

استنتج $\cos 2x$ و $\sin 2x$

بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

32 احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$$(\cos x + i \sin x)^3$$

استنتج $\cos 3x$ و $\sin 3x$

بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

احسب $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$.

33 عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث

يكون العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقيا . تخيليا صرفا.

34 اكتب على الشكل الخطي العددين

$$\cos^3 x, \sin^3 x$$

استنتج الكتابة الخطية للعدد $\sin^3 \frac{x}{3}$ و $\cos^3 \frac{x}{3}$.

حل معادلات من الدرجة الثانية

35 حل في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C}

المعادلة ذات المجهول z التالية

$$z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$$

36 (أ) عين العددين الحقيقيين α, β حيث

$$(\alpha - i\beta) = -3 + 4i$$

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية :

مسائل

41. المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(\vec{v}, \vec{u}; O)$ ، (الوحدة هي 2cm).

نعتبر النقطتين A، C ذوي اللاحقتين على الترتيب

$$z_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

1. عين الطويلة و عمدة لكل من z_1, z_3 .

2. انشئ النقطتين A و C.

3. احسب $\frac{z_3}{z_1}$ ثم استنتج قياسا للزاوية $(\vec{OC}; \vec{OA})$.

4. عين اللاحقة z_2 للنقطة B بحيث يكون الرباعي

OABC مستطيلا. أرسم هذا المستطيل.

42. المستوي منسوب الى معلم متعامد

و متجانس $(\vec{v}, \vec{u}; O)$. A، B، C نقط للاحقاتها

على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -1 - i$.

$$z_3 = 1 - (2 + \sqrt{3})i$$

1. أ) احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب

$$z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. أ) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_1}{z_2}$.

ب) اكتب z_1, z_2 على الشكل المثلثي.

ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$.

ج) استنتج من السؤال (2) القيمة المضبوطة لكل

$$\sin \frac{\pi}{12}, \cos \frac{\pi}{12}$$

43. 1. حل في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C}

المعادلة ذات المجهول z حيث $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2. M، L، K نقط للاحقاتها على الترتيب

$$z_M = -\sqrt{3}, \quad z_L = -1 + i, \quad z_K = 1 + i$$

. انشئ هذه النقط في المستوي المزود بمعلم متعامد

و متجانس $(\vec{v}, \vec{u}; O)$ ، (الوحدة هي 4cm).

3. أ) نسمي N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى L. عين لاحقة N.

ب) لتكن A صورة M و C صورة N بالدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

عين اللاحقتين z_A, z_C للنقطتين A و C.

ج) لتكن D صورة M و B صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $(2)\vec{u}$.

عين اللاحقتين z_D, z_B للنقطتين D، B.

4. أ) عين منتصف كل من القطعتين [DB]، [AC].

$$\text{ب) احسب العدد } \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$$

ج) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

44. ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن $A(-3i)$

$$\text{و النقطة } M'(z') \text{ حيث } z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$$

1. برهن أن التحويل T يقبل نقطتين صامدتين

B، C يطلب اعطاء لاحقة كل منهما.

2. نسمي (8) الدائرة ذات القطر [BC].

لتكن M نقطة من (8) تختلف عن B و C

M' صورتها بالتحويل T.

أ) تحقق أن لاحقة النقطة M تحقق

$$z = -3i + 4e^{i\theta} \text{ حيث } \theta \text{ عدد حقيقي.}$$

ب) عبر عن اللاحقة z' للنقطة M' بدلالة θ .

استنتج أن M' تنتمي إلى (8).

ج) برهن أن $z' = -\bar{z}$ ثم استنتج انشاء هندسيا

للنقطة M'.

حلول التمارين و المسائل

الاعداد المركبة

$$z_1 + z_2 + z_3 = -1 + 8i \quad \text{1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = -6 + 7i \quad : \quad 3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 9 - \frac{7}{2}i$$

$$\frac{1}{z_3} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \quad : \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{17} - \frac{9}{17}i$$

$$(z_1 \cdot z_2)^2 = -13 - 84i \quad : \quad z_1^2 = 3 + 4i$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2 + (\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = 1 \quad \text{2}$$

$$z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \quad \text{3}$$

$$i^{1947} = -i \quad : \quad i^4 = 1 \quad : \quad i^3 = -i \quad : \quad i^2 = -1 \quad \text{4}$$

$$\bar{z}_2 = 3i + i(2 + 1) \quad : \quad \bar{z}_1 = -i(3 - 2i) \quad \text{5}$$

$$\bar{z}_4 = (1 + 2i)^{10} \quad : \quad \bar{z}_3 = \frac{-2i - 1}{3 - 2i}$$

$$z = \frac{3 - 5i}{1 + i} \quad \text{6}$$

$$z - \bar{z} = -8i \quad : \quad z + \bar{z} = -2$$

$$\text{Im}(z) = -8 \quad : \quad \text{Re}(z) = -2$$

$$2 + z\bar{z} \quad : \quad z + \bar{z} \quad \text{الأعداد الحقيقية هي} \quad \text{7}$$

$$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) \quad : \quad (z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$$

$$2 + z\bar{z} \quad : \quad z + \bar{z} \quad \text{الأعداد التخيلية الصرفة هي}$$

$$(iz^2(\bar{z})^2 = i(z\bar{z})^2 \quad : \quad i\bar{z}^2(\bar{z})^2 \quad \text{لأن}$$

$$O \text{ بالنسبة إلى } M(z) \text{ نظيرة } C(-z) \quad \text{8}$$

$$A(\bar{z}) \text{ نظيرة } M(z) \text{ بالنسبة إلى } (O; \vec{u})$$

$$B(-\bar{z}) \text{ نظيرة } M(z) \text{ بالنسبة إلى } (O; \vec{v})$$

$$(z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)) \quad D(z + \bar{z})$$

$$(z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)) \quad E(z - \bar{z})$$

$$J\left(\frac{1}{2}(z - \bar{z})\right) \quad : \quad I\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)$$

حلول التمارين و المسائل

14 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة من اليمين إلى اليسار.

العدد	الشكل المثلثي	الشكل الأسّي
z_1	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
z_2	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_3	$4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$
z_4	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
z_5	$512(\cos 0 + i\sin 0)$	$512e^{i0}$

15 يكتب z على الشكل $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و منه نجد الشكلين المثلثي $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ و الأسّي $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

16 لدينا $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ و منه الشكل المثلثي $z^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ نستنتج أن $|z| = 2$: $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}$

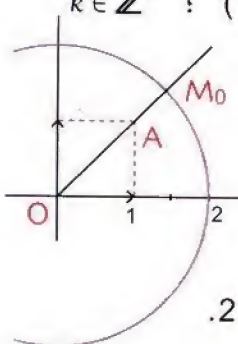
17 (أ) مجموعة النقط $M(z)$

حيث $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ هي مجموعة النقط M

حيث $k \in \mathbb{Z}$: $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

أي نصف المستقيم

[OA] حيث $A(1+i)$



(ب) مجموعة النقط $M(z)$

حيث $|z| = 2$ هي الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 2.

(ج) مجموعة النقط $M(z)$ حيث

$|z| = 2$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

هي تقاطع المجموعتين السابقتين أي هي النقطة

$M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

9 $z_2 = 5 - i$: $z_1 = 2 + 2i$

$z_4 = 8 + 6i$: $z_3 = 2$

$z_6 = -5 + 14i$: $z_5 = -21 - 20i$

10 $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i$: $z_1 = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

$z_3 = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}i$

11 $z = 2x + 2 + (-5 + 5x)i$

$\text{Im}(z) = 5x - 5$: $\text{Re}(z) = 2x + 2$

z حقيقي من أجل $x = 1$.

z تخيلي صرف من أجل $x = -1$.

12 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة

الشكل الأسّي	الشكل المثلثي للعدد z	$\arg z$	$ z $
$2e^{-i\frac{\pi}{12}}$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$-\frac{\pi}{12}$	2
$2e^{i\frac{13\pi}{12}}$	$2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$	$\frac{13\pi}{12}$	2
$e^{i\frac{5\pi}{12}}$	$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	1
$e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	1

13 ملاحظة : ترتيب الاجابات يتبع ترتيب الاسئلة

من اليمين إلى اليسار.

الشكل الأسّي	الشكل المثلثي للعدد z	$\arg z$	$ z $
$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	16
$4e^{i\frac{11\pi}{12}}$	$4\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$\frac{11\pi}{12}$	4
$e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	1
$\frac{\sqrt{6}}{16}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$\frac{\sqrt{6}}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{16}$

حلول التمارين و المسائل

18 (أ) .

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = |z_G| = 4$$

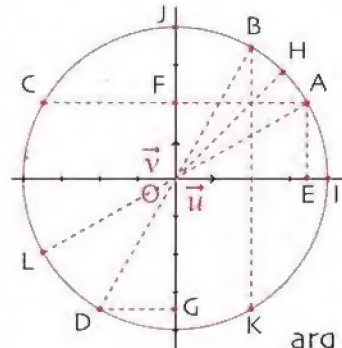
$$\arg z_A = \frac{\pi}{6} \text{ (مسقط A على (O) هو منتصف [O])}$$

$$\arg z_E = 0 ; \arg z_C = \pi - \frac{\pi}{6} ; \arg z_B = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg z_G = -\frac{\pi}{2} ; \arg z_F = \frac{\pi}{2} ; \arg z_D = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$|z_H| = 4 \cdot$$

$$\arg z_H = \frac{\pi}{4}$$



إذن نقطة H مشتركة بين الدائرة و منتصف

الزاوية $(\vec{OI}; \vec{OH})$.

$$\arg z_K = \frac{5\pi}{3} ; |z_K| = 4$$

إذن H هي نظيرة B بالنسبة إلى (OI).

$$\arg z_L = \frac{7\pi}{6} ; |z_L| = 4$$

إذن L هي نظيرة A بالنسبة إلى O.

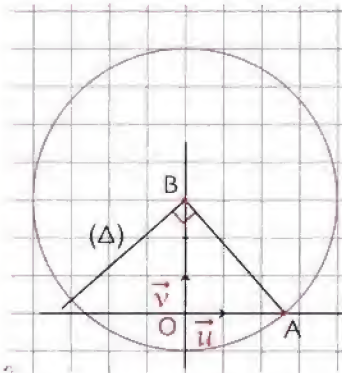
19 .

$$\left| \frac{z - 3i}{2 - 3i} \right| = \frac{BM}{BA}$$

$$\frac{BM}{BA} = 1$$

يعني $BM = BA$

مجموعة النقط M



هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $BA (BM = \sqrt{13})$

$$\arg \left(\frac{z - 3i}{2 - 3i} \right) = (\vec{BM}; \vec{BA}) \cdot$$

مجموعة النقط M حيث $(\vec{BM}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

هو نصف المستقيم (Δ) العمودي على (AB)

في B (باستثناء B) و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (OB) و الذي لا يشمل النقطة A.

20 . مجموعة النقط $M(x; y)$ هي :

$$(أ) \cdot \text{المستقيم } \Delta_1 : 2x + 4y - 7 = 0$$

$$(ب) \cdot \text{المستقيم } \Delta_2 : y = -2$$

$$(ج) \cdot \text{الدائرة } (C_1) : x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$$

مركزها $\omega(0; -5)$ و نصف قطرها 3.

$$(د) \cdot \text{الدائرة } (C_2) : x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$$

مركزها $\omega(0; -3)$ و نصف قطرها 4.

$$(هـ) \cdot \text{الدائرة } (C_3) : x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

مركزها $\omega(-2; -1)$ و نصف قطرها 2.

$$(و) \cdot \text{المستقيم } \Delta_3 : y = \frac{1}{2}$$

21 . مجموعة النقط M هي :

(أ) . نقط محور الترتيب ذات الترتيب الموجبة تماما.

(ب) . نقط محور الترتيب باستثناء المبدأ.

(ج) . نقط محور الفواصل ذات الفواصل الموجبة تماما.

(د) . نقط محور الفواصل باستثناء المبدأ.

22 . بالرجوع إلى تعريف عمدة عدد مركب

$$(أ) \cdot (\vec{i}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi \cdot$$

هي منتصف $(\vec{i}; \vec{j})$ باستثناء المبدأ O.

(ب) . لتكن A(-1) إذن $\vec{AM}(z + 1)$

$$\arg(z + 1) = (\vec{i}; \vec{OM})$$

هي نصف المستقيم (Δ_2) طرفه A (باستثناء A)

و يشمل $J(0; 1)$.

$$(ج) \cdot \text{لدينا } \vec{JM}(z - 1)$$

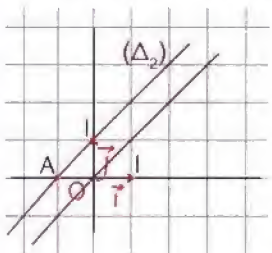
$$\arg(z - 1) = (\vec{i}; \vec{JM})$$

$$\text{أي } (\vec{i}; \vec{JM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم (Δ_3) طرفه J

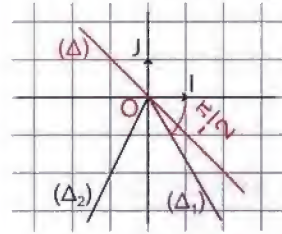
(باستثناء J) و محمول على (Δ_2) .



حلول التمارين والمسائل

23 أ . لدينا $\arg \bar{z} = -\arg z$ إذن مجموعة النقط M هي النصف الثاني (Δ) باستثناء O .

ب . $\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \arg z$ إذن $\arg z = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_1) طرفه O (باستثناء O) ويشمل نقطة مثل $A(1; \sqrt{3})$ وميله $-\sqrt{3}$.



ج . لدينا

$$\arg(-z) = \pi + \arg z$$

إذن مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_2)

نظير (Δ_1) بالنسبة إلى محور الترتيب.

24 نسمي $\operatorname{Re}(z)$ و $\operatorname{Im}(z)$ الجزئين الحقيقي

و التخيلي للعدد $Z = \frac{z-1}{z+2i}$.

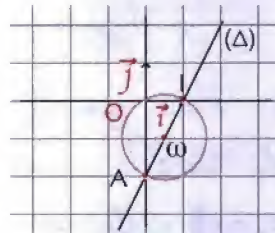
$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{-2x+y+2}{x^2+(y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط $M(z)$ في هذه الحالة هي المستقيم $\Delta: 2x - y - 2 = 0$ باستثناء النقطة $A(0; -2)$.

ب . Z تخيلي صرف يعني

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-x+2y}{x^2+(y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $A(-2; 1)$ وتشمل المبدأ باستثناء A .



ج . نعتبر النقطتين

$$A(-2; 1) \text{ و } I(1; 1)$$

مجموعة النقط M تحقق

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{IM}) = 4\pi$$

و هي المستقيم (Δ) باستثناء A .

د . مجموعة النقط M تحقق

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{IM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

و هي الدائرة (C) باستثناء A و I .

25 أ . مجموعة النقط M تحقق المعادلة

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ (اتحاد المنصفين الأول و الثاني)}$$

ب . مجموعة النقط M تحقق $y = \frac{1}{2x}$ (قطع زائد).

ج . مجموعة النقط M تحقق $x^2 - y^2 = 1$ (قطع زائد).

26 أ . مجموعة النقط M تحقق المعادلة

$$x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \text{ و هي الدائرة التي مركزها}$$

$$\omega(-\frac{1}{2}; 0) \text{ و نصف قطرها } \frac{3}{2}.$$

ب . مجموعة النقط M تحقق $\frac{x^2 + y^2 + 2y - 8}{x^2 + (y+4)^2}$

و هي الدائرة التي مركزها $\omega(0; -1)$ و نصف

قطرها 3 باستثناء $A(0; -4)$.

27 أ . مجموعة النقط M تحقق المعادلة $y = 0$

مع $(x; y) \neq (-1; 0)$ و هي محور الفواصل باستثناء $A(-1; 0)$.

ب . مجموعة النقط M تحقق $x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0$

مع $(x; y) \neq (-1; 0)$ و هي الدائرة التي مركزها

$$\omega(-\frac{3}{2}; 0) \text{ و نصف قطرها } \frac{1}{2} \text{ باستثناء } A$$

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \quad \text{28}$$

2. نستنتج أن (CA) ، (CB) متعامدان.

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2} \quad \text{29}$$

و بالتالي (AB) ، (AC) متعامدان.

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0 \cdot 1 \quad \text{30}$$

2. و بالتالي (AB) ، (AC) متوازيان.

حلول التمارين و المسائل

• نستنتج الكتابة الخطية للعدد $\sin^3 \frac{x}{3}$ ، $\cos^3 \frac{x}{3}$

$$\cos^3 \frac{x}{3} = \frac{1}{4} \left(\cos x + 3 \cos \frac{x}{3} \right)$$

$$\sin^3 \frac{x}{3} = -\frac{1}{4} \left(\sin x - 3 \sin \frac{x}{3} \right)$$

$$\Delta = (2 - i)^2 - 4(3 - i) = -9 \quad (35)$$

للمعادلة $z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$ حلان هما

$$z = 1 - 2i \quad \text{أو} \quad z = 1 - i$$

$$\alpha = 1 \quad \text{و} \quad \beta = 2. \quad (36)$$

ب. للمعادلة $2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

ج. إذا كان α حلا حقيقيا للمعادلة

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0 \quad (*)$$

فإن α تحققها.

و نجد بعد تعويض z بالعدد α والاختصار الجملة

$$\begin{cases} 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 7\alpha - 3 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ يحقق هذه الجملة و هو الحل الحقيقي.

$$(z - 1)(2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i) =$$

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i$$

إذن الحلان الآخران للمعادلة $(*)$ هما حلا المعادلة

الواردة في أ.

$$t^2 + 8it + 48 = 0 \quad \text{إذن} \quad z^2 = t \quad (37)$$

$$t = z^2 = -12i \quad \text{أو} \quad t = z^2 = i$$

$$z_2 = -z_1 \quad \text{أو} \quad z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

$$z_4 = -z_3 \quad \text{أو} \quad z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_c = -7 - i : z_c = k z_A + (1 - k) z_B. \quad (38)$$

$$z_D = 5 - i : z_D = e^{i\theta} z_B + (1 - e^{i\theta}) z_A. \quad \text{ب.}$$

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x \quad (31)$$

(حسب قانون موافر)

$$(\cos x + i \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x$$

(حسب ثنائي الحد لنيوتن)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{نستنتج أن}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x \quad (32)$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$+ i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \quad \text{نستنتج أن}$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{لدينا}$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{إذن نكتب أيضا}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos n \frac{\pi}{3} + i \sin n \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{لدينا} \quad (33)$$

$$\sin n \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{عدد حقيقي يعني}$$

إذن n مضاعف 3.

$$\cos n \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{تخبي صرف يعني}$$

و هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد

الطبيعية و بالتالي مجموعة الحلول خالية.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{لدينا} \quad (34)$$

$$\cos^3 x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^3 = \frac{1}{8} [e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) \quad \text{إذن}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} : \sin^3 x = \left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]^3$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{8i} [e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x) \quad \text{إذن}$$

حلول التمارين و المسائل

42 (أ. 1) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ $|z| = 1$.

(ب) $\frac{BC}{BA} = 1$ و $(\widehat{BC}, \widehat{BA}) = -\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

(أ. 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1+\sqrt{3})}{2}$.

(ب) $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

(ج) $\frac{z_1}{z_2} = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$.
 $= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1+\sqrt{3})}{2}$

إذن $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

43 (أ. 1) $z = -1 + i$ أو $z = 1 + i$.

2. تنشأ النقط M, L, k اعتمادا على المعطيات.

(أ. 3) $z_N = -2 + \sqrt{3} + 2i$

(ب) $z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_M = \sqrt{3} i$

$z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} z_N = 2 - (\sqrt{3} - 2)i$

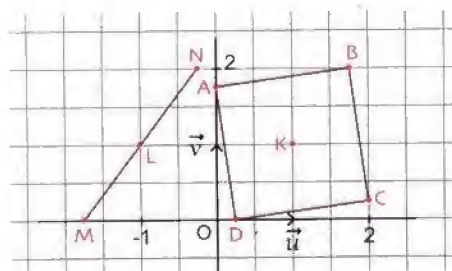
(ج) $z_D = z_M + 2 = -\sqrt{3} + 2$

$z_B = z_N + 2 = \sqrt{3} + 2i$

4. (أ) لاحقة منتصف [DB] هي $1 + i$ هي $\frac{1}{2}(z_D + z_B)$

أي لاحقة منتصف [AC] هي $1 + i$ هي $\frac{1}{2}(z_A + z_C)$

أي K ومنه [AC] و [DB] متناصفان في K.



(ج) $z_E = -4 - 2i$: $z_E = z_B + z_{AB}$.

(د) O مرجع النقط A, B, C المرفقة على الترتيب بالمعاملات α, β, γ .

$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 7\gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \end{cases}$, $\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$

باعتبار γ وسيطا و حل الجملة السابقة

نجد $\alpha = 2\gamma$, $\beta = -3\gamma$, $\gamma \neq 0$

باختيار $\gamma = 1$ نجد $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 1)$

39 (أ) التحويل دوران $R(\omega; \frac{\pi}{2})$: $\omega(2+i)$

(ب) التحويل تحاك $H(\omega; 2)$: $\omega(3i)$

(ج) التحويل انسحاب $T_{\vec{v}}$: $\vec{v}(1+i)$

(د) التحويل تناظر مركزي S_ω : $\omega(\frac{i}{2})$

40 التحويل دوران $R(\omega; -\frac{\pi}{3})$: $\omega(-2i)$

41 (أ. 1) $|z_1| = 2$: $\arg z_1 = \frac{\pi}{4} + k2\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

$|z_3| = 1$: $\arg z_3 = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

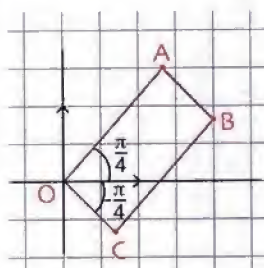
2. اعتمادا على طويلة z_1

و عمدة له $\frac{\pi}{4}$

ننشئ النقطة A.

و بالمثل بالنسبة

إلى النقطة C.



3. $\frac{z_3}{z_1} = -\frac{i}{2}$ ومنه $(\widehat{OA}, \widehat{OC}) = \arg \frac{z_3}{z_1} = -\frac{\pi}{2}$

4. OABC مستطيل يعني أن القطرين [OB], [AC]

متناصفان أي $\frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2} (z_1 + z_3)$

ومنه $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (3 + i)$

حلول التمارين و المسائل

(ب) $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{1}{i}$

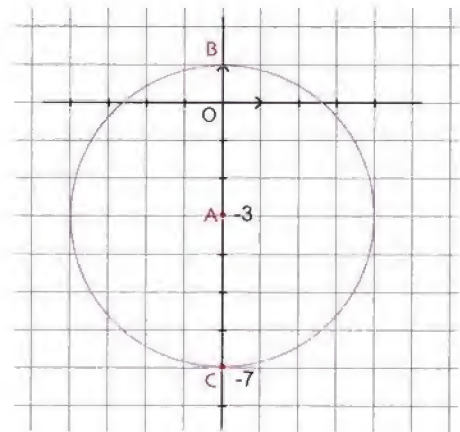
(ج) $\left| \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} \right| = 1$ أي $KC = KB$

(ك) $\arg \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = -\frac{\pi}{2}$ أي $(KC) \perp (KB)$
إذن ABCD مربع.

44. 1. المعادلة $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

أي $z^2 + 6iz + 7 = 0$

تقبل حلين $z_B = i$ و $z_C = -7i$ و منه النقطتان الصامدتان B ، C.



1. أ. A منتصف [BC]

ال دائرة التي مركزها A و نصف قطرها 4 باستثناء B ، C .

لدينا $|z - z_A| = 4$ و $z - z_A = 4e^{i\theta}$

إذن $z = -3i + 4e^{i\theta}$ (θ عدد حقيقي).

(ب) $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ و منه $|z' + 3i| = 4$

أو $AM' = 4$ نستنتج أن $M' \in (\gamma)$

(ج) $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ يعني $z' = -\bar{z}$

نستنتج أن M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور الترتيب، و منه إنشاء M' .